

Oleksandr Novykov, Valeriy Tikhonov, Vadim Litvinov



METHODS OF ANALYSIS OF LAUNCH VEHICLES INJECTION ACCURACY



Tempus

NETCENG

VILNIUS GEDIMINAS TECHNICAL UNIVERSITY

Oleksandr Novykov, Valeriy Tikhonov, Vadim Litvinov

METHODS OF ANALYSIS FOR LAUNCH
VEHICLE INJECTION ACCURACY

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ТОЧНОСТИ
ВЫВЕДЕНИЯ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

Monograph / Монография

VGTU Press TECHNIKA
Vilnius

The book is used as a tutorial within the scope
of the TEMPUS project
New Model of the Third Cycle in Engineering Education
due to Bologna Process in BY, RU, UA (NETCENG)

Information about the project on the Internet: <http://netceng.eu>

This project has been funded with the support of the European Commission

This publication reflects the views of the author only, and the Commission
cannot be held responsible for any use which may be made
of the information contained therein

Книга используется в качестве учебного пособия
в рамках проекта ТЕМПУС NETCENG
«Новая модель третьего уровня высшего инженерного
образования в соответствии с рекомендациями
Болонского процесса в университетах
Белоруссии, России, Украины»

Информация о проекте в сети Интернет: <http://netceng.eu>

Проект финансируется при поддержке Европейской комиссии

Содержание данной публикации является предметом ответственности
авторов и не отражает точку зрения Европейской комиссии

NETCENG



Co-funded by the
Tempus Programme
of the European Union

UDK 629.76
No-162

Recommended by the Scientific and Technical Council of Yangel Yuzhnoye State Design Office (protocol of 14 March 2014) and the Academic Council of Oles Honchar Dnipropetrovsk National University (protocol No 13 of 3 July 2014)

Рекомендовано научно-техническим советом ГП «КБ «Южное» им. М. К. Янгеля» (протокол от 14 марта 2014 г.) и Ученым советом Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара (протокол № 13 от 03 июля 2014 г.)

Under the editorship of Academician A. Degtyarev,
Member of the National Academy of Science of Ukraine

Reviewers / Рецензенты: Ph.D., prof. I. Igdalov
Ph.D., prof. V. Perlik
Ph.D., prof. A. Shevtsov

Scientific book 2360-M
VGTU Press TECHNIKA

Книга научной литературы издательства «Техника» (2630-M)
Вильнюсского технического университета им. Гедиминаса
<http://leidykla.vgtu.lt>

ISBN 978-609-457-873-1
eISBN 978-609-457-872-4
doi:10.3846/2360-M

This publication is subject to the condition that it shall not be reproduced, publicised or made publicly available through computer networks of libraries, libraries of education and science institutions, museums or archives, to which this piece of work is made available. Permissions can be requested by e-mail: leidyba@vgtu.lt

CONTENTS

Introduction.....	7
Acronyms	9
1. Flight conditions	10
1.1. Launch Vehicle Trajectories.....	10
1.1. Launch Vehicle Trajectories.....	11
1.2. Spacecraft Flight.....	16
1.3. Osculating Orbits.....	23
2. Flight control.....	27
2.1. Navigation.....	28
2.2. Guidance.....	45
3. Injection accuracy.....	61
3.1. Definitions	62
3.2. Statistical Parameters	62
3.3. Methodology for the Evaluation of Injection Accuracy	65
4. Disturbing factors.....	71
4.1. General Remarks	71
4.2. Control Errors	73
4.3. Separation Errors.....	74
4.4. Disturbances of the Atmospheric Flight Leg.....	75
4.5. Disturbed Motion of an SC	75
4.6. Errors in Preparation of Geodetic and Gravimetric Data	90
5. A Priori evaluation of the injection accuracy	92
5.1. Mathematical Model of the Disturbed Motion of an LV	92
5.2. Analysis of Errors	99
5.3. Dependence of the Injection Accuracy on Launch Conditions.....	101
6. A posteriori evaluation of the injection accuracy	106
6.1. Statistical Processing of Test Results.....	106
6.2. A Posteriori Analysis of Errors	112
7. Experimental-theoretical characteristics of the injection accuracy	114
7.1. Zenit Launch Vehicle	114
7.2. Cyclone Launch Vehicle	120
References.....	255

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	127
Список основных сокращений	129
1. Элементы баллистики	130
1.1. Траектория полета ракеты-носителя	130
1.2. Полет космического аппарата	136
1.3. Соприкасающиеся орбиты	144
2. Управление полетом	148
2.1. Навигация	150
2.2. Наведение	169
3. Точность выведения	187
3.1. Основные определения	188
3.2. Статистические параметры	189
3.3. Методология оценки точности выведения	192
4. Возмущающие факторы	198
4.1. Общие положения	198
4.2. Погрешности управления	200
4.3. Ошибки отделения	201
4.4. Возмущения атмосферного участка	202
4.5. Возмущенное движение КА	202
4.6. Ошибки подготовки геодезических и гравиметрических данных	219
5. Априорная оценка точности выведения	220
5.1. Математическая модель возмущенного движения РН	220
5.2. Анализ ошибок	227
5.3. Зависимость точности выведения от условий пусков	229
6. Апостериорная оценка точности выведения	234
6.1. Статистическая обработка результатов испытаний	234
6.2. Апостериорный анализ ошибок	241
7. Опытнo-теоретические характеристики точности выведения	243
7.1. Ракета-носитель «Зенит»	243
7.2. Ракета-носитель «Циклон»	249
Литература	255

INTRODUCTION

The accuracy of spacecraft injection into specified orbit by launch vehicles and accuracy of warhead target hit are basic flight characteristics of a rocket complex on the whole, and a ballistic missile in particular, as they are characteristic of the degree of perfection and are defining criterion components in a comparative analysis of various rocket complexes.

Therefore, the development of space rocket complexes gives much attention to payload injection accuracy, and requirements for this characteristic continue to grow more rigorous.

Deviation of actual parameters of launch vehicle trajectories from design values is caused by disturbances acting in powered and non-powered trajectory legs (spread in structural rocket and propulsion system parameters, deviations from nominal external flight conditions, control system instrument errors, etc.). Taking into account the fact that rocket motion is controlled in the powered trajectory leg, parameter deviation is finally determined at engine cut-off by methodical and instrumental errors in a control system. To minimize the above errors, current launch vehicles are equipped with high-precision control systems based on gyroplatform and onboard computer systems to implement termination guidance methods.

As a branch of science, assessment of accuracy characteristics of launch vehicles presents one of sections of rocket flight dynamics and includes a set of sciences such as theoretical mechanics, flight mechanics, gyro and inertial system theory, oscillation theory, probability theory as well as mathematical statistics, geodesy, gravimetry, etc.

Works by different authors including R. F. Appazov, S. S. Lavrov, V. P. Mishin (1966), A. A. Lebedev, N. F. Gerasyuta (1970), O. G. Sytin (1987), A. V. Novikov, N. G. Beletskaya (1998) and others are devoted to the assessment of characteristics particular to the dispersion of ballistic missile reentry vehicles and the accuracy characteristics of space launch vehicles.

The content of this book reflects the Yuzhnoye SDO experience in the development of rocket complexes. The problem solving methodology for the assessment of accuracy characteristics of rockets was developed thanks to efforts of leading scientists from Yuzhnoye SDO, TsNIIImash, RPC for Automatics and Instrument-Making, RI for Applied Mechanics, Khartron-Arkos RPE, and RF MD TchTsNII. Personal significant contributions to the theory and practice of problem solving related to specified accuracy characteristics of rocket complexes have been made by the lead-

ing scientists of the scientific school of Corresponding Member of the Ukrainian Academy of Sciences N. F. Gerasyuta: Doctor of Technical Sciences, Professor I. M. Igdalov, candidates of technical sciences V. V. Brieker, V. M. Morozov, N. E. Zykov, V. V. Gorbuntsov, lead experts R. S. Yakupov, S. V. Martyntsev as well as representatives of allied organisations Ya. M. Tsurkis, G. N. Rummyantsev, V. I. Reshetnikov, S. S. Koruma, G. I. Morozenko and others.

Firstly, accuracy characteristics of launch vehicles are assessed based on the results of developmental work (in a laboratory, factory, etc.) on control system instruments. Taking into account the unfeasibility of a full flight simulation on the Earth, materials from launch vehicle flight tests and standard launches are to be added to results of a priori estimate (before flight) to obtain a more precise assessment of injection accuracy.

This work is devoted to reviewing of a priori/a posteriori estimate of injection accuracy of launch vehicles with an inertial control system. Experimental-theoretical characteristics of the injection accuracy for Zenit and Cyclone launch vehicles – leaders in the injection accuracy among the current space rocket complexes – are given as an example.

The authors express their gratitude to the Doctor of Engineering Professor I. M. Igdalov and Doctor of Engineering Professor V. I. Perlik for many useful comments that allowed to improve the content of the book. The authors also express their appreciation to N. P. Zykova for her great work on the preparation of the manuscript for printing.

The monograph is mainly intended for experts working in scientific-research institutes and space industry design offices, and can be useful for senior students of higher education institutions of aerospace.

ACRONYMS

PFL	–	powered flight leg
GINS	–	gimballess inertial navigation system
OC	–	onboard computer
GSP	–	gyro-stabilized platform
PS	–	propulsion system
INS	–	inertial navigation system
SC	–	spacecraft
FV	–	flying vehicle
ME	–	mathematical expectation
SP	–	separable part
NPFL	–	non-powered flight leg
US	–	upper stage
LV	–	launch vehicle
RV	–	random value
CS	–	coordinate system
AGCS	–	absolute geodetic coordinate system
ILCS	–	initial launch coordinate system
BACS	–	body-axis coordinate system
RMSD	–	root-mean-square deviation
CS	–	control system
c.m.	–	centre-of-mass

Chapter 1

FLIGHT CONDITIONS

1.1. Launch Vehicle Trajectories

Launch vehicle (LV) means a guided flying vehicle, whose trajectory is a spatial curve described in flight by the rocket's centre of mass (c.m.). LVs are intended for the injection of a spacecraft (SC) into specified flight trajectories.

There are two types of a vehicle flight: programmed (powered trajectory leg – PTL, Fig. 1.1) and ballistic (non-powered trajectory leg – NPTL). The flight based on the principle of throwing is said to be a ballistic flight and is defined in general by ballistics, aerodynamics and laws of celestial mechanics. The flight based on the control principle according to a specific program by forces acting on a flying vehicle is said to be a programmed flight.

Beginning its motion from the launch point, firstly a launch vehicle takes its programmed flight, during which it gains kinetic energy due to the operation of the propulsion system (PS). In addition, the Earth's gravitational force, PS thrust force, aerodynamic force and forces generated by controls are acting on the rocket.

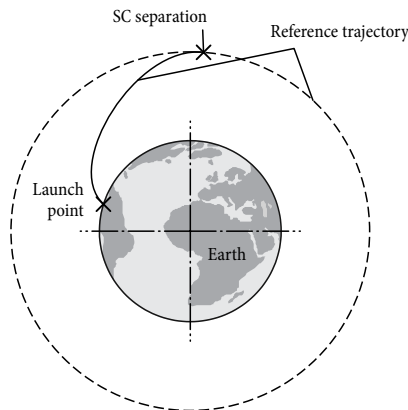


Fig. 1.1

All of the above forces (except for the Earth's gravitational force) can be varied in flight using a control system (CS), through which the rocket motion is controlled. The portion of the programmed rocket flight is said to be a powered trajectory leg. In the powered trajectory leg, a flying vehicle is an integrated design consisting of a launch vehicle, which can be multistage (having several parts – stages), and the spacecraft. The potential (flight altitude) and kinetic (flight speed) energy reserve of a SC, which takes its flight further along the ballistic trajectory, is achieved from LV firing. At the end of the powered trajectory leg, PS is cut off, the SC or re-entry vehicle (for ballistic missiles) is separated and takes its ballistic flight. The Earth's gravitational force and aerodynamic force act on the SC during its ballistic flight. The SC motion is mostly uncontrolled during a ballistic flight; so, a ballistic flight leg is said to be a non-powered trajectory leg. The ballistic flight leg is many times longer than the programmed flight leg. In terms of a LV, the law of motion control must be subject to the main requirement, i.e. achieved required flight speed, altitude and other kinematic characteristics at the beginning of a non-powered flight with minimum propellant consumption, including requirements for minimum rocket dispersion relative to the target.

LV motion is generally considered in the orthogonal Cartesian coordinate system and is characteristic of motion parameters. Three coordinates X, Y, Z defining rocket c.m. position in the selected coordinate system and three c.m. velocity vector components V_x, V_y, V_z or in a vector form – radius-vector \bar{R} and c.m. velocity vector \bar{V} – can be motion parameters. The law of rocket motion (trajectory) can be represented as c.m. radius-vector functional dependence on flight time $\bar{R}(t)$. This dependence is fully defined by initial motion conditions and the system of forces acting on an in-flight rocket. Considering that a LV is a sufficiently integrated flying vehicle, whose launch is connected with high material costs, mathematical motion models are widely used to study the LV motion.

1.1. Launch Vehicle Trajectories

Differential equations describing rocket motion form the basis for the mathematical motion model. A specific type of a mathematical model is defined by the set problem of motion study, depending on which the following is selected: mechanical rocket model, flight conditions model, model of forces and moments applied to rocket, etc.

It is necessary to emphasize the following features of a rocket as a dynamic system.

The rocket and its control system form a closed dynamic system, whose processes (rocket motion, flexible rocket oscillations and liquid fuel tank sloshing, electrical signal conversions, controls deflections, etc.) are described by a complex differential equation system.

The following rocket motion components can be considered:

- centre of mass motions;
- motions about the centre of mass;
- flexible body oscillations (bending vibrations in two planes, longitudinal and torsional oscillations);
- liquid fuel tank sloshing with regard to a rocket body with the availability of free surfaces of fuel.

A rocket can be considered absolutely hard only in case of the first approximation. Generally, bending vibrations of the rocket body can interact with control system oscillations and liquid fuel sloshing. When oscillation frequencies are rather close, rocket motion must be studied considering the interaction between associated oscillation processes.

The centre-of-mass motion of a rocket is unsteady, and rocket parameters and parameters of its motion vary substantially during the flight. Variations in motion parameters are connected with the high propellant flow and rocket movement at a variable velocity through the atmosphere, whose density reduces quickly with increasing altitude. As a result of high propellant flow, such rocket characteristics as mass, moments of inertia and the centre of mass position vary. Flight altitude and atmospheric density change in combination with a quick change in the result of rocket motion velocity in the rather specific nature of dynamic pressure change.

When the Mach number varies, aerodynamic rocket characteristics also vary, particularly, C_t – coefficient of tangential force, C_n^α – derivative of normal force coefficient with respect to the attack angle, and \bar{x}_d – relative coordinate of the centre of pressure. In connection with the fact that a propulsion system usually transfers to the low-thrust mode at the final seconds into powered flight, a quick variation of thrust and axial acceleration occurs in this motion leg.

Multistage rockets also have discontinuous variations of rocket parameters and motion parameters connected with the spent stage (separable part, SP) separation and the start of the propulsion system operation of the next stage, in addition to the above continuous changes.

Discontinuous parametric variations can take place both at a stage separation and the separation of structural rocket components jettisoned after the rocket comes out of dense atmospheric layers (nose cone fairing, aft bay components, etc.). During the flight, dynamic properties of a rocket as a controlled object (the efficiency of controls, the response of the rocket to the deflection of controls, etc.) vary to a great extent as a result of varying rocket parameters and parameters of its motion.

The differential equation system, which gives quite a complete description of a controlled rocket flight, has a very high order and is a nonlinear stochastic equation system.

The associated works on ballistics, e.g. (Лебедев, Герасюта 1970; Аппазов, Лавров, Мишин 1966; Герасюта, Новиков, Белецкая 1998; Аппазов, Сытин 1987; Дмитриевский *et al.* 1964) etc., give a detailed description of a mathematical motion model.

This work presents only one possible type of the mathematical rocket motion model borrowed from (Лебедев, Герасюта 1970).

As indicated in the above work, a study on a rocket flight can be simplified by a good choice of a coordinate system. Practically, it turns out to be most expedient to obtain object rotational motion equations by the projection of associated vector equation to object-related axes. However, the choice of a coordinate system to generate scalar equations of the c.m. motion of an object depends greatly on the problem under consideration. For example, it is expedient to consider motion with respect to the Earth's axes when studying controlled rocket motion in a powered trajectory leg.

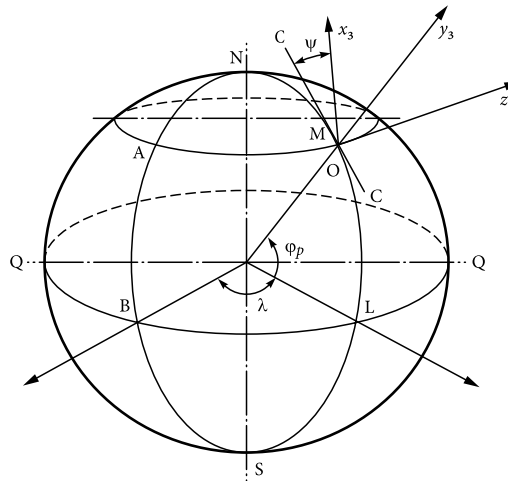


Fig. 1.2. M – launch point; NABS – initial (Greenwich) meridian; NMLS – local meridian; φ_p – geocentric latitude of point M ; λ – longitude of point M ; CC – tangent to local meridian at point M ; ψ – launch azimuth

Axes of this system $Ox_3y_3z_3$ (Fig. 1.2) are Earth-fixed and involved in its daily rotation. In short, they are called the Earth's axes.

The origin of the coordinate system O is in the launch point. Oy_3 axis is directed along the radius-vector drawn from the centre of the common Earth's ellipsoid through the launch point. Ox_3 axis forms with the local meridian plane angle ψ , which is called the launch azimuth. Oz_3 axis is directed so that the coordinate system is to be right-handed.

Equations of the centre-of-mass motion of a rocket in projections to the Earth's axes are in the form of

$$m \frac{dV_{x_e}}{dt} = N_{x_e} + G_{x_e} - m j_{cx};$$

$$\begin{aligned} m \frac{dV_{y_e}}{dt} &= N_{y_e} + G_{y_e} - m j_{cy}; \\ m \frac{dV_{z_e}}{dt} &= N_{z_e} + G_{z_e} - m j_{cz}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

where $\bar{N} = \bar{R} + \bar{P}$ – vector of resultant total aerodynamic force (\bar{R}) and thrust force (\bar{P}); \bar{G} – gravitational vector; \bar{j}_c – Coriolis acceleration vector; m – rocket mass; \bar{V}_e – rocket c.m. velocity vector.

Kinematic equations of the centre-of-mass motion of a rocket in projections to axes of the Earth's coordinate system are

$$\begin{aligned} \frac{dx_e}{dt} &= V_{x_e}; \\ \frac{dy_e}{dt} &= V_{y_e}; \\ \frac{dz_e}{dt} &= V_{z_e}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where x_e, y_e, z_e – rocket c.m. radius-vector projections.

Dynamic Euler equations

$$\begin{aligned} J_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + (J_{z1} - J_{y1}) \omega_{y1} \omega_{z1} &= \sum M_{x1}; \\ J_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{x1} \omega_{z1} &= \sum M_{y1}; \\ J_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + (J_{y1} - J_{x1}) \omega_{y1} \omega_{x1} &= \sum M_{z1}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

where J_{x1}, J_{y1}, J_{z1} – moments of LV inertia with regard to body axes; $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ – rocket angular velocity projections $\bar{\omega}$ to their body axes; M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} – projections of force moment \bar{M} vector acting on body axes of the rocket.

Projections of the angular velocity of the rocket to body axes

$$\begin{aligned} \omega_{x1} &= \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} \sin \psi_1; \\ \omega_{y1} &= \frac{d\psi_1}{dt} \cos \psi_1 \cos \gamma_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \sin \gamma_1; \\ \omega_{z1} &= \frac{d\psi_1}{dt} \cos \gamma_1 - \frac{d\psi_1}{dt} \cos \psi_1 \sin \gamma_1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Equation system (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) can be used to describe unguided rocket motion but for a guided rocket it is not yet closed. The matter is that an unguided rocket, as a solid body, has six degrees of freedom. According to this, its motion is described by the system of 12 differential equations of first order, which is closed as forces P, X_1, Y_1, Z_1 acting on the rocket and their moments M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} with

regard to body axes are uniquely defined by motion parameters of the rocket and the number of unknown functions

$$X_e, y_e, z_e, V_{x_e}, V_{y_e}, V_{z_e}, v_1, \psi_1, \gamma_1, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$$

equal to the number of differential equations. With that, when random disturbances are absent, the flight trajectory is fully defined by initial conditions – kinematic parameters of motion at initial time

$$x_e(t_0), y_e(t_0), z_e(t_0), \dots, \omega_{z1}(t_0).$$

A guided rocket (when neglecting its flexibility and considering it as a mechanical system) has already, in the general case, 12 degrees of freedom: six degrees of freedom for the centre-of-mass motion and rotation about the centre-of-mass, and six degrees of freedom for associated controls. Particularly, if normal forces in control are generated by the rotation of the rocket about two axes, the rocket has four controls: pitch, yaw and roll rotational motions/engine thrust controls. With that, the system of 12 differential equations (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) is not closed as projections of forces and moments included into right sides of equations depend on the movement of controls through pitch δ_{v_1} , yaw δ_{ψ_1} , roll δ_{γ_1} motions and engine thrust δ_p .

When time variation for values $\delta_{v_1}(t)$, $\delta_{\psi_1}(t)$, $\delta_{\gamma_1}(t)$, $\delta_p(t)$, is given in addition to initial conditions, the rocket trajectory will be determined. In a real flight, controls are moved by the control system depending on a flight task. To make the task of flight trajectory determination feasible, it is necessary to add equations, which describe control system processes and connect movements of controls with rocket motion parameters, to the considered system of rocket motion equations. These equations can have a completely different concrete form depending on the principle of operation and control system arrangement.

Generally, control system equations can be presented as

$$\begin{aligned} F_1[\delta_{v_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t)] &= 0; \\ F_2[\delta_{\gamma_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t)] &= 0; \\ F_3[\delta_{\psi_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t)] &= 0; \\ F_4[\delta_p(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

where F_1, F_2, F_3 and F_4 – functionals from functions in square brackets.

Sixteen equations (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) now form a closed system defining 16 unknown functions

$$x_e, y_e, z_e, V_{x_e}, V_{y_e}, V_{z_e}, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}, v_1, \psi_1, \gamma_1, \delta_{v_1}, \delta_{\psi_1}, \delta_{\gamma_1}, \delta_p.$$

Thus, the controlled flight trajectory (system solution) is determined through given initial conditions and concrete connections (1.5) imposed by the control system on the motion of the rocket.

Depending on a solvable problem, the above common equations of motion can be simplified to a greater or lesser extent.

When forming motion equations, one has to take into account what trajectory leg is under consideration.

In a powered trajectory leg, the motion of the rocket must be considered taking control into account. Since the rocket flight with regard to the Earth is studied in most cases, and the control system of the rocket is usually inertial, one has to consider the centre-of-mass motion in the Earth's coordinate axes and the orientation of the rocket – in inertial or initial launch axes. It results in the possible application of more or less simplified equations based on common equations considered earlier.

In consideration of motion in the free flight leg above the air, the study of the trajectory becomes easier due to the absence of the thrust force, aerodynamic forces and forces generated by controls as well as moments of all the forces. However, because of long range, altitude and flight speed, one has to take into account gravitational acceleration variation and the effect of the Earth's rotation.

In the atmospheric re-entry leg of the descending vehicle, aerodynamic forces and moments are of great importance. Since the flight is uncontrolled in this leg, there is no need to rely on an inertial coordinate system, and different simplifications of motion equations in projections to half-speed axes can be used for the study.

1.2. Spacecraft Flight

Assume that there is an isolated system of two bodies P_0 and P with masses m_0 and m in space and let the bodies attract one another as particles according to the Newtonian law of gravitation (it strictly applies to bodies of spherical form and approximately – for bodies, whose dimensions are small compared to the distance separating them). It is necessary to study the motion of one body relative to the other body. The motion obtained based on the problem of two bodies is called the undisturbed Keplerian motion.

Let us take the absolute coordinate system $O\xi\eta\zeta$ and write ξ_0, η_0, ζ_0 for coordinates of the centre-of-mass of the body P_0 and ξ, η, ζ for coordinates of the centre-of-mass of the body P . Then, differential equations of the motion of bodies P_0 and P will be recorded as:

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = f_m \frac{\xi - \xi_0}{r^3}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = f_{m_0} \frac{\xi_0 - \xi}{r^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= f_m \frac{\eta - \eta_0}{r^3}, & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= f_{m_0} \frac{\eta_0 - \eta}{r^3}, \\ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= f_m \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3}, & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= f_{m_0} \frac{\zeta_0 - \zeta}{r^3},\end{aligned}$$

where f – gravitation constant and

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2}$$

is the distance between bodies P and P_0 .

The absolute coordinate system is not considered good practice, so one has to apply other coordinate systems.

Let us take the rectangular coordinate system P_0xyz with the origin at the centre-of-mass of the body P_0 , with axes P_0x , P_0y , P_0z parallel to $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, respectively. Then, coordinate transformation formulas take the form:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + x; \\ \eta &= \eta_0 + y; \\ \zeta &= \zeta_0 + z.\end{aligned}$$

Differential equations of the relative motion of the body P will be recorded as:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu \frac{x}{r^3}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu \frac{y}{r^3}; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mu \frac{z}{r^3}, \\ \mu &= f(m_0 + m), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

These differential equations describe an undisturbed Keplerian motion of a planet relative to the Sun, undisturbed satellite motion relative to the planet, the undisturbed motion of an artificial Earth satellite relative to the Earth, etc.

Energy Integral

In vector record equations (1.6) take the form:

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \bar{\mathbf{r}}.\tag{1.7}$$

Multiplying this equation scalarwise by $2\bar{\mathbf{r}}$,

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} \cdot 2\bar{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r^3} \cdot 2\bar{\mathbf{r}},$$

after transformation and integration, we will obtain

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

where h – constant of integration.

This equation can be presented as:

$$\frac{mV^2}{2} - m\frac{\mu}{r} = \frac{mh}{2}, \quad (1.8)$$

or $T + U = h$,

where T – kinetic energy; U – potential energy; h – constant.

Thus, the first integral (1.8) expresses the law of energy conservation, so it is said to be the energy integral and constant of integration h – energy constant. Based on the energy integral, one can draw some conclusions about the nature of undisturbed motion:

– from energy integral recorded as

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = \text{const},$$

it follows that at an increasing distance r from the attractive centre, the SC velocity is gained and vice versa.

- The SC velocity cannot be imaginary, so $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \geq 0$. If $h > 0$, SC radius-vector can be increased without a limit, but if $h < 0$, SC motion is not beyond the sphere with the radius $r = \frac{2\mu}{h}$. This sphere is said to be a zero velocity surface (Fig. 1.3).
- If $r \rightarrow \infty$ then $V^2 \rightarrow h$, i.e. SC velocity when moving away from the attractive centre over the infinite distance will be

$$V_{\infty} = \sqrt{h}.$$

This velocity is said to be infinite velocity.

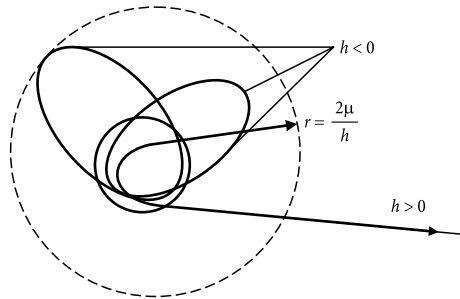


Fig. 1.3. Zero Velocity Surface

Area Integral

The second system integral is obtained by similar transformations. Let us multiply the original vector equation (1.7) by $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} + \bar{\mathbf{r}} \times \frac{\mu}{r^3} \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0.$$

After transformations, we will obtain

$$\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = 0.$$

After integration, we will have

$$\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{C}},$$

where $\bar{\mathbf{C}}$ – integration constant.

This equation is the integral of the system, referred to the area integral, $\bar{\mathbf{C}}$ is the constant vector with components C_1, C_2, C_3 . $\bar{\mathbf{C}}$ constant is said to be the area constant.

To find out the nature of motion let us multiply this equation scalarwise by $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{C}}.$$

In connection with that

$$\bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = 0, \quad \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 0$$

or in projections to the inertial coordinate system axis

$$C_1 X + C_2 Y + C_3 Z = 0.$$

This is the equation of a plane passing through the origin of coordinates. So, an undisturbed SC motion takes place in the invariable plane with $\bar{\mathbf{C}}$ vector being perpendicular to it all the time. $\bar{\mathbf{C}}$ area constant defines the location of the spatial orbital plane. Since this is applicable to any point of time including the initial time, the orbital plane will also pass through SC initial velocity vector. Thus, according to the law of areas, the SC undisturbed motion takes place in the plane passing through the initial velocity vector and the centre of gravity (Fig. 1.4).

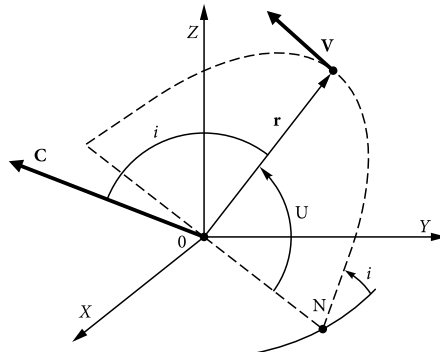


Fig. 1.4

Product $(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}})$ is nothing but the kinetic SC momentum, so the area integral expresses the law of conservation of momentum.

Laplacian Integral

There is one more first integral of a differential equation system for a problem with two bodies, i.e. the Laplacian integral.

$$-\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r} + (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}) = \bar{\mathbf{f}}, \quad (1.9)$$

where $\bar{\mathbf{f}}$ – constant vector (integration constant) having components f_1, f_2, f_3 . Let us determine its direction. For this purpose, let us multiply the expression (1.9) scalarwise by $\bar{\mathbf{C}}$:

$$\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}) - \frac{\mu}{r} \cdot \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{r}}.$$

Both terms on the right side of the equation are equal to zero as they represent scalar products of perpendicular vectors. So $\bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{f}} = 0$ or in coordinate form

$$C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 = 0.$$

Thus, the vector $\bar{\mathbf{f}}$ is perpendicular to vector $\bar{\mathbf{C}}$, i.e. lies in an orbital plane.

Orbit Equation

Let us derive the equation for the SC motion trajectory and introduce the polar coordinate system r, υ for this purpose. SC position will be defined by the radius-vector r (the distance from the SC to the centre of attraction) and the polar angle υ between the radius-vector r and some fixed direction in the orbital plane, for which we take the Laplacian vector (Fig. 1.5).

Let us multiply scalarwise expression for the Laplacian integral (1.9) by $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}^2}{r} + \bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}).$$

Transforming in accordance with vector multiplication rules, we will obtain

$$f \cdot r \cdot \cos(\upsilon) = -\mu \cdot r + C^2.$$

Expressing the coordinate r depending on the coordinate υ and constants, we will obtain

$$r = \frac{C^2 / \mu}{1 + (f / \mu) \cdot \cos(\upsilon)}.$$

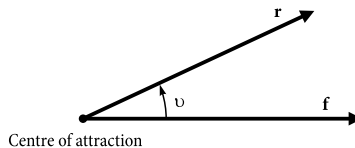


Fig. 1.5. Polar Coordinate System

Denote

$$\frac{C^2}{\mu} = p, \quad \frac{f}{\mu} = e.$$

Then, obtain the SC orbit equation in the polar coordinates (r, υ)

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\upsilon)}.$$

It is the equation of a conic section i.e. the second-order curve resulting from the intersection between surfaces of the right circular cone and the plane in the polar coordinates. The form of the conic section depends on the tilt angle of the cut plane in respect of the cone axis. It may be a circle, ellipse, parabola and hyperbola (Fig. 1.6).

The obtained orbit equation expresses Kepler's first law, i.e. the orbit of a body moving in the central gravitational field is a conic section, in one of whose focuses there is the central body. Parameters e and p are for eccentricity and focal orbital parameters. They define the orbital shape and size:

- $e = 0$ is a circle;
- $0 < e < 1$ – an ellipse;
- $e = 1$ – a parabola;
- $e > 1$ – a hyperbola.

Orbit of undisturbed motion represents the conic section, for whose unique determination six following elements are required (Fig. 1.7):

- inclination i and ascending node longitude Ω giving the orbital plane orientation;
- semi-major axis length a and eccentricity e determining the orbit geometry (orbital shape and size);

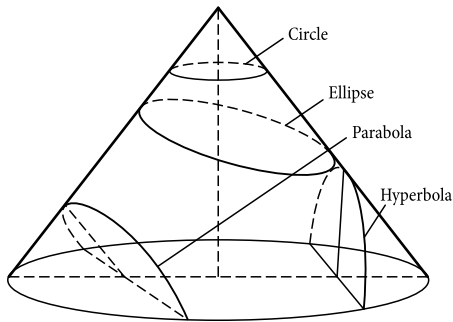


Fig. 1.6

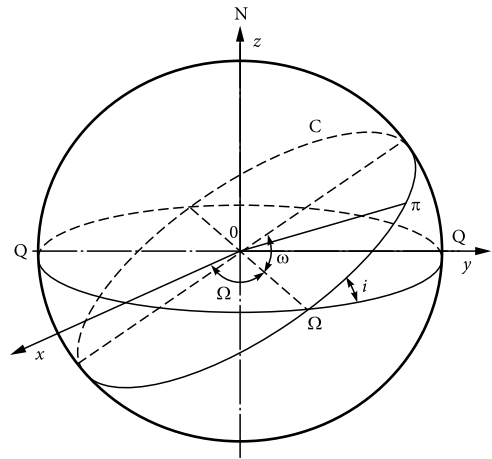


Fig. 1.7. Elliptical orbit elements

- pericentre argument ω and time of passing through the pericentre τ_p fixing the orbital attitude in its plane and the orbital SC position.

The algorithm of the analysis of orbital parameters analysis is given in Section 1.3.

The orbital plane of a satellite moving in the central field intersects the equator plane along the line of nodes $O\Omega$.

The point at which the satellite intersects the equator plane when moving from the south to the north is said to be the ascending node. The angle between the direction to vernal equinox point and the line of nodes ($XO\Omega$ angle) is said to be the right ascension or the **longitude of the ascending node** and is denoted by Ω . The angle between the tangent to the orbit in the ascending node in the direction of the body motion and the tangent to the equator in the direction of OY axis is said to be the **orbital plane inclination** and is denoted by i . This angle is changed from 0° to 180° . The angle $\Omega O\Pi$ counted in the direction of orbital motion defines the **perigee position Π** and is denoted by ω .

Thus,

- the **longitude of the ascending node Ω** is the angle counted counter-clockwise within the equator plane, viewing from the North Pole, starting in the direction of the vernal equinox point to the direction of the orbit's ascending node. This angle may be changed within $0 \leq \Omega \leq 360^\circ$;
- the **orbital inclination to the Earth's equatorial plane i** is the angle counted counter-clockwise viewing from the direction of the ascending node, from the equatorial plane to the orbital plane. This angle may be changed within $0 \leq i \leq 180^\circ$. At $i = 0^\circ$ and $i = 180^\circ$ orbit is said to be equatorial (the orbital plane coincides with the equatorial plane);
- the **perigee argument ω** is the angle counted within the orbital plane in the direction of motion from the direction of the ascending node to the direction of the perigee. The perigee argument is changed within $0 \leq \omega \leq 360^\circ$.

For equatorial orbits when $i = 0$, the ascending node position becomes uncertain. When approaching circular orbits ($e < 0.0005$), the perigee position also becomes uncertain. Here, by uncertainty of the value ω we do not mean the mathematical uncertainty, which only applies to a circular orbit, but a practical uncertainty connected with the dramatic effect of inadvertent errors in measurement and calculation of the accuracy determining the perigee position. In this case, the notion of the **pericentre longitude Π** , as the sum of two angles Ω and ω ($\Pi = \omega + \Omega$) measured from the constant spatial direction, is introduced to determine the orientation of the orbit within its plane.

It should be noted that some of specified orbital elements can be replaced with other equal elements: altitude of the apogee H_a and perigee H_p – for elliptical orbits;

altitude H_{\max} – for circular orbits; orbital period T ; normal direction to orbital plane γ ; pericentre longitude L_p ; focal orbital parameter p , etc.

Altitudes are determined with regard to the mean Earth's radius $R_m = 6378.14$ km. Besides, the altitude deflection ΔH_{\max} refers to the maximum (in absolute value) deflection from the estimated radius-vector position of the SC on the orbit from the calculated twelve points evenly spaced at 30-degree angle in relation to the SC, beginning from the design position in injection point, i.e. the component is included into the altitude deflection due to the shift in the orbit pericentre.

For near-equatorial orbits, the pericentre longitude dispersion ΔL_p ($L_p = \omega + \Omega$) is equivalent to the perigee argument dispersion $\Delta\omega$ counted from the design perigee position within the nominal orbital plane.

As the perigee position in a circular orbit ($e = 0$) or the node line position with coincident fixed and orbital planes ($i = 0$) are not determined, the application domain of the circumscribed orbital parametric system is limited.

In practice, orbital parameters are often calculated in the orbital rectangular coordinate system OnrB: the origin being in the centre-of-mass of the SC; when the axis B is perpendicular to the orbital plane and the area integral vector \vec{c} ; axis r is pointed along the radius-vector of the c.m. of the SC in its increasing direction; and axis n completes the system to the right-hand side.

1.3. Osculating Orbits

Spacecraft motion is affected by attracting forces of the Sun and the Moon as well as drag, solar pressure, etc. Moreover, the Earth's gravitational field is not actually the central force field due to non-sphericity of the Earth and non-uniformity of mass distribution inside it.

As a result of the effect of the forces, the actual orbit is not a conic section (ellipse) but a complex spatial curve. So, it is somewhat difficult to study the disturbed motion of a SC. In practice, this problem is superseded by the problem of disturbed osculating motion.

According to the idea of this method, one can consider that a celestial body (or SC) always moves in a conic section; however, the section changes at every instant. In other words, the solution to the problem of disturbed motion is determined by the same six first integrals that apply to the solution of the problem of undisturbed motion, and orbital elements Ω , i , ω , p , e , r are not considered constant but as certain time functions:

$$i = i(t), r = r(t), \text{ etc.}$$

Orbital elements will be determined so that disturbed motion equations are to be satisfied.

From the standpoint of mechanics, the essence of the method is to supersede real disturbed trajectory of SC motion with a great number of orbits (undisturbed motion trajectories), which osculate with real trajectory at every instant.

A real trajectory is an envelope in the family of undisturbed motion orbits. In astronomy, touching curves are osculating, so the above undisturbed motion trajectories are said to be osculating orbits and their elements – osculating elements.

Let disturbing force act in point P_1 on a body moving in a Keplerian orbit C_0 (Fig. 1.8), whose elements are uniquely defined by initial conditions. Force action will be considered as impulsive, i.e. instantaneous.

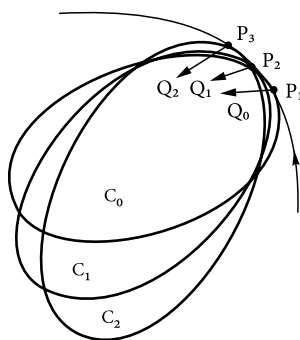


Fig. 1.8

The position of point P_1 , a new direction and value of velocity define a new conic section C_1 , in which the body will move until it is disturbed again by some external force. Let there be point P_2 , in which the body will transfer to a new conic section C_2 . When it lasts ad infinitum, the body will move in conic sections changing sometimes under the action of disturbing forces.

Within the range, pulses transfer into continued disturbing force, and orbit becomes conic section, whose every element is ever-changing.

Thus, an osculating orbit is defined as an orbit, the elementary arc of which coincides with the elementary arc of the real orbit. The time for the body to pass this elementary arc is the epoch of osculation. During a separate epoch of osculation, an osculating conic section can be used to determine the position and velocity of a body to a sufficient accuracy. In the case a disturbing force disappears during this epoch of osculation, from this point the osculating conic section presents an accurate orbit of the body. Deviations of osculating elements from their values in undisturbed motion (initially) are disturbances of orbit elements.

Disturbances are divided into periodic (periodic time functions) and secular (monotone, increasing with time).

Osculating orbital parameters are calculated based on single measurements of radius-vector and velocity vector in the following sequence.

Determine the area vector

$$\bar{\sigma} = [\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{V}}_1]$$

and single vector of outer normal

$$\bar{\sigma}^0 = \frac{\bar{\sigma}}{|\bar{\sigma}|} = [\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0].$$

Taking into account that

$$\bar{\sigma}^0 = [\sin(\Omega) \cdot \sin(i), -\cos(\Omega) \cdot \sin(i), \cos(i)],$$

determine the Greenwich longitude of the ascending node Ω and the orbital plane inclination i :

$$i = \arccos(\sigma_z^0) = \arccos\left(\frac{x_1 V_{1y} - y_1 V_{1x}}{[\bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{V}}_1]}\right);$$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin(i)}\right), & \text{if } \sigma_z^0 > 0; \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin(i)}\right), & \text{if } \sigma_z^0 < 0. \end{cases}$$

Calculate the focal orbit parameter

$$p = \frac{|\bar{\sigma}|^2}{\mu},$$

the orbit eccentricity

$$e = \sqrt{1 + \left(V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1}\right) \cdot \frac{|\bar{\sigma}|^2}{\mu^2}}$$

and the true anomaly

$$v = \begin{cases} \arccos\left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{e}, & \text{if } (\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{V}}_1) \geq 0; \\ -\arccos\left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{e}, & \text{if } (\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{V}}_1) < 0. \end{cases}$$

Determine the latitude argument of the SC

$$u = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_1}{r_1} \cos \Omega + \frac{y_1}{r_1} \sin \Omega\right), & \text{if } \text{sign}\left(\frac{z_1}{r_1} \sin \Omega\right) = \text{sign}(y_1 V_{1z} - z_1 V_{1y}); \\ -\arccos\left(\frac{x_1}{r_1} \cos \Omega + \frac{y_1}{r_1} \sin \Omega\right), & \text{if } \text{sign}\left(\frac{z_1}{r_1} \sin \Omega\right) = -\text{sign}(y_1 V_{1z} - z_1 V_{1y}) \end{cases}$$

and the pericentre argument

$$\omega = u_1 - \mathfrak{v}_1.$$

Determine:

- semi-major axis $a = \frac{p}{1-e^2}$,
- osculating SC orbit period $T_{osc} = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$,
- orbit apocentre radius-vector $r_a = \frac{p}{1-e}$,
- orbit pericentre radius-vector $r_p = \frac{p}{1+e}$.

If required, other parameters of an osculating orbit may be calculated using dependences given in (Авдеев *et al.* 1990).

Chapter 2

FLIGHT CONTROL

A control system of any mobile object performs three main functions:

- function to obtain navigation-measuring information;
- guidance function, consisting of the programming of the motion of a controlled object and the generation of one-time guidance commands in order to achieve the final control objective;
- motion stabilization function, consisting of the development of control programs drawn up in the process of guidance problem solution, and in ensuring a stable motion under conditions of external and internal disturbances acting on a complex controlled object.

In accordance with the above functions, the mobile object control system can be divided into three interconnected functional subsystems:

- navigation-measuring system,
- guidance system,
- motion stabilization system.

A controlled mobile object is a complex multiloop and a multifunctional object, which is described by a great number of state parameters and has some independent control parameters. Information and control signals of such a control system are multivariable and include some independent components.

A system that has several control closed-loops is considered multiloop. As there are cross couplings between separate loops, some control loops may have a harmful effect on others, which may result in a loss of quality of the entire control system or even make it inoperative.

Soviet scientist I. Voznesensky was the first to propose the concept of the principle of independent (untied) control. According to this principle, a control system of a complex multiply-connected object with a great number of control parameters should be built, where possible, as a set of independent systems, each of them having a fewer number of control parameters (single, if possible) and having no effect on the functioning of adjacent subsystems. As a rule, this circumstance simplifies the

synthesis problem of a control system in general and improves its quality in such indices as stability margins, accuracy and running speed.

The independent control principle may not be always implemented in practice but only in those cases, when for this purpose there is a required background both for dynamic properties of a controlled object and for the content of control problems. When building flight control systems, the backgrounds emerge mostly due to the possible presentation of LV motion as a superposition (independent addition) of several simpler motions. Thus, a fundamental approach adopted in mechanics for describing the motion of a solid body, in accordance with which compound rotary-translatory body motion is a combination of translatory motion of its centre-of-mass and the body motion about the centre-of-mass (in many cases, these motions either have a minor effect on each other or are rather independent), enables to divide a flight control problem into LV translatory motion control problem and its rotary motion control problem.

Under certain conditions, the motion of the centre-of-mass of a body can be divided into three motions in three mutually perpendicular planes – longitudinal, lateral and transverse. At minor deflections in the motion of the centre-of-mass of LV from the programmed trajectory, these three motions are practically independent which, in particular, makes it possible to build the system for the stabilization of the centre-of-mass motion as three independent channels of longitudinal, lateral and normal stabilization. Similarly, in case of minor deviations in LV altitude parameters (e.g. Euler angle) from their programmed values, the LV rotary motion can be divided into three practically independent rotations about associated axes. This circumstance enables a system for the stabilization of a flying vehicle (FV) attitude (the critical problem of FV rotation motion under a specified program) to be built as three independent channels.

2.1. Navigation

Inertial navigation systems (INS) are devices intended for determining motion parameters of different objects (flying vehicles, surface vessels, submarine vessels, etc.). The systems are widely used. Information obtained from them is used both for the implementation of a trajectory motion program and for attitude control of an object.

INS offer important advantages over other navigation systems, i.e. application universality, possibility to determine basic motion parameters (coordinates, velocity, acceleration, motion direction, attitude control, etc.), action self-containment, noise immunity, high accuracy at operation time limitation.

Some shortcomings are characteristic of INS, including:

- the increase in errors with time, which limits time-availability without the use of corrective measures;

-
- the complexity of a device and the need to use high-precision basic measuring elements and computers;
 - high-cost operation: highly-qualified engineering personnel and associated equipment are required for service (adjustment, testing, repair).

In the initial period, two directions were outlined for building inertial systems to determine navigation parameters.

In terms of the first issue, proposals were related to the application of gyro indicators and stabilizers to determine spatial directions (meridian and vertical directions) and to gyro attitude control (determination of position coordinates).

In terms of the second issue, proposals were based on the application of accelerometers with certain pointing of their measuring axes to the horizon plane and integration of their readings to determine the velocity and coordinates of the position of the object.

Ship gyrocompasses built by G. Anschütz-Kempfe (Germany 1908) and Elmer A. Sperry (USA, 1911) can be considered as first cases when an inertial method was used to determine spatial direction. Works by M. Schuler (Austria), in which he established non-disturbance conditions through horizontal gyrocompass accelerations (1910), physical and gyroscopic pendulums (1923) in the base motion along the arc of fixed great circle, were the next great achievement. It has been showed that when the non-disturbance condition is met for pendulums, they have the period of zero satellite (84.4 min). The principle of power gyro stabilization was offered by S. A. Nozdrovsky (USSR, 1924) and was of great importance for further development of inertial systems.

As the original idea of accelerometer application was developed, it passed some phases before it became a part of a more common idea of the main equation construction of an inertial method to determine motion and its solution. The original idea was reduced to the simplest “natural” method for determination of a traversed path (coordinates) through the integration of accelerometer readings when complying with specified limitations on orientation of the axes of the measuring trihedral and hypothetical conditions related to the Earth’s shape and gravitational field. Simplicity and naturalness of the method lie in the well-known conception that the acceleration integral gives velocity and the second integral gives the traversed path. When complying with specified conditions, accelerometer reading integration presents a solution to the point dynamics equation, i.e. the differential equation of an object’s centre-of-mass motion in projection to a definite direction (axis). This trend features two important points. The first point implies that the direction in the selected plane of object motion will be constant, i.e. absolute angular rotation velocity in this direction within this plane is zero. The second point implies that the direction will be perpendicular to the vector of the gravitational field strength. Only

when these conditions are satisfied, accelerometer reading integration gives values of velocity and traversed path in this direction without methodical errors.

The first primitive device to determine the velocity and path was offered by R. Vussov (1905). The device included free non-adjustable three-degree gyro with a vertical axis of its own rotation, on which an accelerometer with a horizontal measuring axis was installed. Two integrators were connected in a series with the accelerometer output and, accordingly, generated signals proportional to the velocity and traversed path. Such system can function without methodical errors on the assumption that the plane non-rotating Earth has a normal gravitational field and that measuring axes do not rotate in the horizon plane. Only under such conditions the integration of accelerometer readings will provide the solution to the differential equation of the c.m. motion of an object and correspond to the value of velocity and traversed path.

Practically simultaneously with R. Vussov, an idea by American and Russian inventors M. Kerri (103) and V. V. Alexeev (1911) was patented for geometric-type inertial systems, which provide determination of coordinates of an object moving over the rotating globe surface. To explain the principle of operation of the geometric-type inertial system, let us consider a mobile object with the onboard ideal free gyro. This gyro may store the exactly direction of the local vertical at starting object motion. For simplicity, let us consider a case when an object is moving north along the Earth's meridian (Fig. 2.1).

Let there be a pendulum aboard the object in addition to a free gyro, which points the exact direction of the local vertical. Measuring angle $\Delta\alpha$ between rotation axes of the free gyro and the pendulum, and multiplying this angle by the Earth's radius R , one can obtain the path traversed by object $s = R\Delta\alpha$. This formula allows evaluating accuracy requirements for gyros used in inertial navigation systems: an

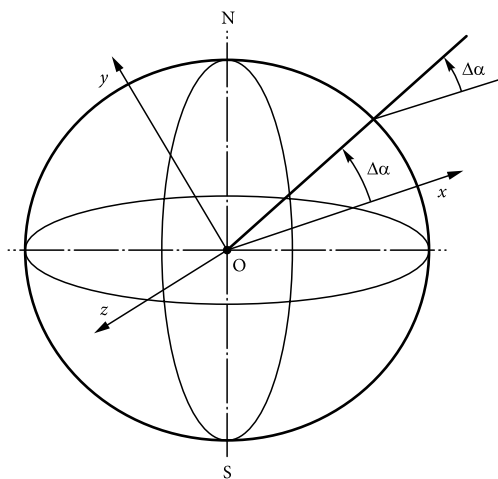


Fig. 2.1

error in one angular minute causes an error in one nautical mile (1852 m = 1 angular minute of meridian arc) on the Earth's surface.

The algorithm for determining the path of an object moving along a parallel is not much more complex. The timer should be taken on board of the object to measure sufficiently precisely time t of the motion of the object. The value of the local vertical angle caused by the Earth's rotation and equal to $\omega_e t$ ($\omega_e = 15^\circ/h$ – the angular velocity of the Earth's rotation) will be subtracted from (added to) the value of angle $\Delta\alpha$. The path traversed by the object is derived from the following formula:

$$s = R(\Delta\alpha \pm \omega_e t)\cos\varphi,$$

where φ – parallel latitude in which object moves.

In arbitrary motion of an object, path determination algorithm is derived by associated division of each small section of the object's path into north and east components.

At first glance, it would seem that R. Vussov's method and the method for the construction of inertial navigation have nothing in common. On the one hand, however, geometric operations are replaced by calculations provided in R. Vussov's method, and on the other hand, a free gyro can be considered as an angular velocity integrator of the XYZ coordinate system (Fig. 2.1) with the origin at the centre of the Earth and one of axes passing through the centre-of-mass of the object. Inertial navigation systems where coordinates are determined using calculating procedure are analytical or semi-analytical.

M. Schuler (Austria) works were a great achievement. He established non-disturbance conditions through horizontal gyrocompass accelerations (1910), physical and gyroscopic pendulums (1923) in the base motion along the arc of fixed great circle. It has been showed that when the non-disturbance condition is met for pendulums, they have the period of zero satellite (84.4 min).

After M. Schuler works, the paper by L. M. Kofman and E. B. Levental (USSR 1932) *Navigation Device to Record Traversed Path and Velocity* became a major achievement, the main point of which was the developed principle of integral control (integral correction) of a gyro. In essence, the authors improved Vussov's scheme, introduced feedback from the first integrator having applied a moment to a gyro. Due to feedback (correction), a gyro being pre-aligned vertically, then tracks the vertical of the position. The system simulates the physical pendulum with the Schuler period. Also, the platform, on which accelerometers are installed, shows the striking non-disturbance property when its attitude does not depend on accelerations of the object, on which the platform is installed. A proposal was put forward to perform the azimuth attitude control of the platform with accelerometers using a gyrocompass. It was assumed that applying the same second device for the direction perpendicular to that of the first device, the problem of parametric determination of motion over

the Earth's surface could be solved. Thus, first integrals from accelerometer readings present velocity components and second integrals – a spherical traversed path. For this system, direct integration of accelerometer readings will present a solution to a differential equation of the c.m. motion of an object only on the assumption that the object moves in great circle of the non-rotating Earth and with the horizontal (gravitational horizon) location of the accelerometer axis, i.e. for the cylindrical Earth. Therefore, integration results will correspond (without methodical errors) to velocity and path. Consequently, for this device, application of simple 'natural' method for velocity and path determination does not result in applicable practical results.

Further progress in the development of an inertial method, when considering the motion over the spherical surface, was made by I. M. Boykov (Austria 1934). His work *Traversed Path Measuring Instrument* differed from the Kofman-Levental scheme by the introduction of an azimuth gyro with the Earth's rotation compensation and considering meridians when calculating longitude. The introduction of integral control (correction) of a gyro was the main idea of the above work as well as the Kofman-Levental scheme. This scheme began to show a departure from a natural method, i.e. taking into account the convergence of meridians and the Earth's rotation. However, taking into account these factors alone did not exclude methodical errors, particularly, rotary accelerations, and the equation of inertial method was not yet generated.

For some time, inertial systems were developed based on gyropendulum systems and gyroscope systems with inertial correction simulating Schuler's physical pendulum and making it possible to construct the vertical undisturbed by accelerations on the moving object. Important results were achieved by B. I. Kudrevich, I. V. Gekkeler, B. V. Bulgakov, Y. N. Reutenberg and A. Y. Ishlinsky.

The first practical implementation of the inertial method is connected with the creation of a simple inertial system for guidance (control) and its use (1942) on a German V-2 rocket. The ideology of building the system was based on the equation of the inertial method for the motion determination. Measuring axes of accelerometers were pointed along the axes of the inertial coordinate system, stabilized by a platform.

The above inertial system was important ideologically. Nevertheless, it solved only one particular problem and demonstrated one possible type of system construction. Further on, many other types and schemes were proposed, which defined the development of certain ideas of the method. However, in the early stage of development of these ideas, B. V. Bulgakov *et al.* raised the problem of the inertial method in general and presented a definite solution to this problem. In 1943–1944, a generalized scheme of an inertial navigation system was first identified, where the vector of phantom acceleration in moving (rotating) axes and the angular-velocity vector

of trihedral rotation of these axes were measured, and equations that describe the functioning of the system were derived, which is a mathematical algorithm.

At that time, practical implementation of inertial system schemes was made possible by the development of load-bearing gyro-stabilized platforms and elaboration of their theory by some authors (B. V. Bulgakov, Y. N. Reutenberg, A. Y. Ishlinsky) as well as based on float gyros proposed by L. I. Tkachev (USSR, 1945) and Tch.S. Draper (USA 1946), which served as a basis for constructing precision gyro platforms (GP).

Later, in addition to special-purpose INS to control rockets, there appeared proposals and theoretical works on systems with analytic, geometric and mixed methods for the solution of the main equation of the inertial method.

2.1.1. INS Classification

INS are classified by the method of trihedral orientation of measuring axes of accelerometers:

- INS with an arbitrary orientation of the axes with respect to both the inertial coordinate system and the object;
- INS with a constant orientation of the axes with respect to the inertial coordinate system, in particular, it may be the orientation according to the axes of the equatorial or launch coordinate systems;
- INS with a constant orientation of the axes with respect to the airframe of the object;
- INS with a controlled orientation of the axes, as a known time function or function of INS-determined coordinates and the velocity of their change. As an example, there may also be the orientation according to the axes of the equatorial coordinate system, constantly related to the Earth, or, if such is a requirement, one axis of the measuring trihedral could be constantly oriented along the position vector (e.g., geocentric).

The following are methods for solving the main equation of the inertial method to determine motion:

- analytical-type of INS, i.e. with a full solution of equations of the method and attitude control by calculation. As an example, such a solution takes place in case of arbitrary orientation of the measuring trihedral or in case of its constant orientation in relation to stars or the airframe of the object;
- semi-analytical-type of INS where, generally, a spatial geometric construction of the position vertical is connected with the analytical solution to equations of the functioning. Here, station-keeping of the platform with inertial elements of the platform control is implemented according to computing laws in the solution of equations of the functioning;

- geometric-type of INS, which is a spatial builder of the position vertical and position coordinates. This type of INS combines control of the attitude of the measuring trihedral with the geometric builder of the positioning system.

INSs are classified by the availability of a stabilized or controlled platform used for the attitude of the measuring trihedral:

- gimballess INS (GINS) where basic measuring devices (accelerometers, gyros) are installed directly on the airframe of the object (Fig. 2.2).
- INS with a stabilized or controlled platform (Fig. 2.3).

Firstly, functions performed by the controlled platform ensure the definite attitude control of the trihedral formed by measuring axes of accelerometers. Secondly, the availability of the stabilizing platform allows obtaining the data on the angular motion of the object with regard to the platform, i.e. to determine attitude parameters. Moreover, the definite system of angles, which are measured by sensors on the platform suspension axes (Fig. 2.4), is used as parameters characterizing the attitude of the object.

In inertial navigation systems without a stabilizing platform, sensitive elements (accelerometers and parametric meters for the attitude of the angular velocity) are

Sensing unit consisting of three accelerometers and three gyroscopes mounted on a common base that is installed directly on the launcher

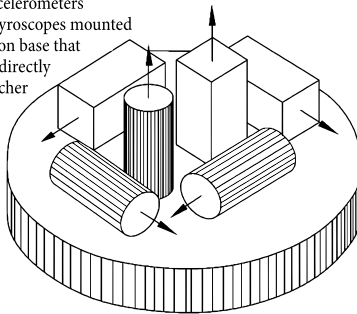


Fig. 2.2

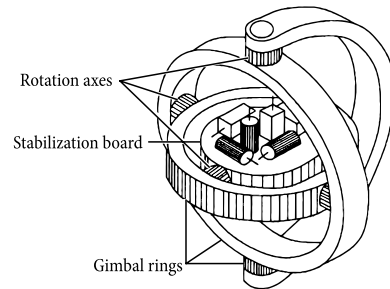


Fig. 2.3

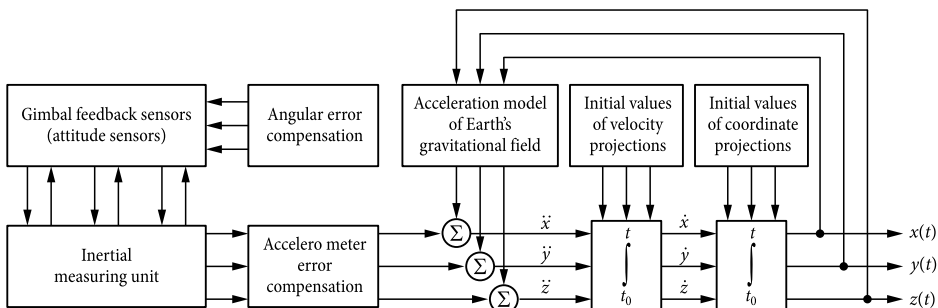


Fig. 2.4

mounted on the associated plate attached to the airframe of the object. At the same time, the number of meters must be sufficient as to obtain the data on the vector of the phantom acceleration of the meter seating and on the vector value (e.g. the vector of the absolute angular velocity) characterizing the angular motion of the object.

This data, in addition to a priori information on a gravitational field and conditions of the initial motion, is sufficient for further calculation of navigation parameters (coordinates, velocity, etc.) and parameters characterizing the attitude (Fig. 2.5) aboard the moving object.

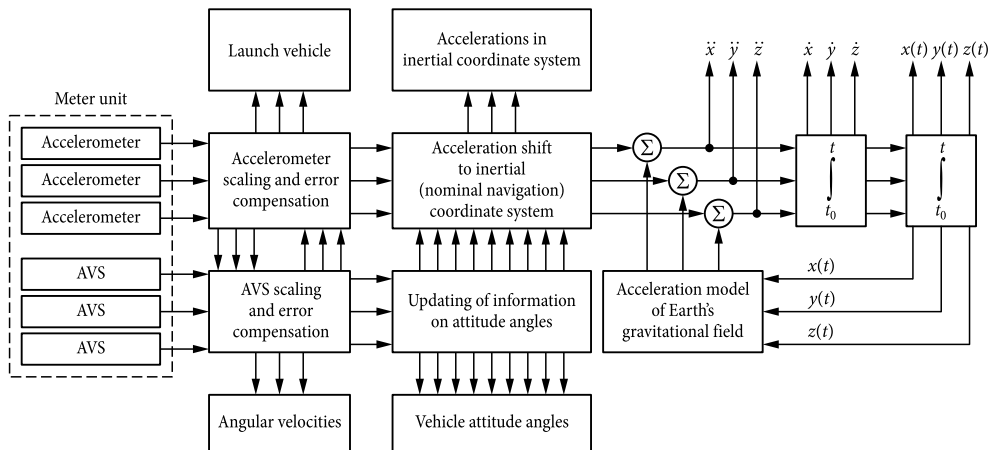


Fig. 2.5

2.1.2. Inertial Method for Motion Parameter Determination

To clarify the idea of the inertial navigation, let us examine the problem of the motion of a material point in a non-inertial coordinate system. In classical mechanics, the Cartesian system with the origin in the centre-of-mass of the solar system and axes oriented towards stationary stars can be considered, to a high accuracy, as an inertial coordinate system. Any other coordinate system, which moves uniformly and in straight lines in relation to the inertial system, is also inertial.

Let $Ox^*y^*z^*$ be the inertial coordinate system, $Oxyz$ be a moving coordinate system rigidly bound to a moving solid body (Fig. 2.6). Acceleration of the material point M in relation to the system $Ox^*y^*z^*$ is absolute acceleration and designated as w^a .

In an inertial coordinate system, Newton's second law is valid for any material point with the mass m , as follows

$$m\bar{w}^a = \bar{F}. \quad (2.1)$$

Here \bar{F} is the resultant of forces applied to the point under consideration.

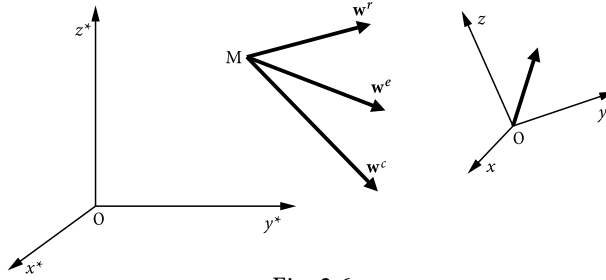


Fig. 2.6

According to the Coriolis theorem, the vector of absolute acceleration $\bar{\mathbf{w}}^a$ of the point is equal to the geometric sum of three accelerations

$$\bar{\mathbf{w}}^a = \bar{\mathbf{w}}^r + \bar{\mathbf{w}}^e + \bar{\mathbf{w}}^c, \quad (2.2)$$

where $\bar{\mathbf{w}}^r$ – relative, $\bar{\mathbf{w}}^e$ – bulk, $\bar{\mathbf{w}}^c$ – the Coriolis accelerations of the point.

Relative acceleration $\bar{\mathbf{w}}^r$ is the acceleration of the point in relation to the moving coordinate system. The bulk acceleration $\bar{\mathbf{w}}^e$ in relation to the fixed coordinate system is the acceleration of that point of the moving coordinate system, with which the point under consideration coincides at that moment. The Coriolis acceleration $\bar{\mathbf{w}}^c$ is determined as the doubled vector product of the angular velocity of the moving system $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ by the vector of the relative velocity of point $\bar{\mathbf{v}}^r$

$$\bar{\mathbf{w}}^c = 2 \cdot (\bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{v}}^r).$$

The sense of Coriolis acceleration vector is determined according to the rule by N. E. Zhukovsky as follows: the vector of the relative velocity of a point will be turned in the plane perpendicular to the vector of the angular velocity $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ by 90° in the direction of rotation of the moving coordinate system.

If you substitute the expression for absolute acceleration (2.2) into Newton's law (2.1) and then transpose terms with translation and Coriolis accelerations into the right side, you will get the differential equation of the motion of the point in the non-inertial coordinate system

$$m\bar{\mathbf{w}}^r = \bar{\mathbf{F}} + \bar{\boldsymbol{\Phi}}^e + \bar{\boldsymbol{\Phi}}^c. \quad (2.3)$$

In this equation, vectors

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}^e = -m\bar{\mathbf{w}}^e, \quad \bar{\boldsymbol{\Phi}}^c = -m\bar{\mathbf{w}}^c \quad (2.4)$$

are translation and Coriolis forces of inertia, correspondingly.

Thus, the basic result of dynamics of the relative motion of a material point can be formulated as follows.

The equations regarding the motion of a material point in the non-inertial coordinate system can be recorded in the form of Newton's second law if translation and Coriolis forces of inertia are added to Newton forces acting on the point.

In the case that the material point is at equilibrium in a moving coordinate system, its coordinates will be constant, and the relative velocity \mathbf{v}^r , the relative acceleration \mathbf{w}^r and the Coriolis acceleration \mathbf{w}^c are reduced to zero.

Thus, the following vector equation of the equilibrium of the material point in the non-inertial coordinate system is derived from equation (2.3):

$$0 = \bar{\mathbf{F}} + \bar{\Phi}^e. \quad (2.5)$$

This equation is equivalent to three scalar equations:

$$\begin{aligned} 0 &= F_x + \Phi_x^e; \\ 0 &= F_y + \Phi_y^e; \\ 0 &= F_z + \Phi_z^e. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Use these equations to determine equilibrium conditions of a material point suspended on a weightless spring in translating object along z^* axis (Fig. 2.7).

Let us suppose that z^* axis of the inertial coordinate system is pointed up along the position vertical, and let us introduce xyz moving coordinate system rigidly bound to the object. Here, z axis of the moving coordinate system is parallel to z^* axis. According to equation (2.5), let us add the translation force of inertia to mg gravitational and $\bar{\mathbf{F}}^{el}$ elastic forces acting on the point and record the last equation (2.6) in the form of

$$0 = -mg + F_z^{el} + \Phi_z^e, \quad (2.7)$$

where mg , F_z^{el} – projections of gravitational and elastic forces, accordingly.

Let us suppose for simplicity that $\bar{\mathbf{F}}^{el}$ elastic force meets Hooke's law, according to which, the force value is proportional to z ring strain counted off from the strain less position

$$F_z^{el} = -Kz,$$

where K – ring force, which is assumed to be constant (Fig. 2.7), shows the case when z ring strain is negative and $F_z = -Kz$ elastic force projection to z axis is positive).

Let us designate the projection of the vector of object acceleration to z axis as a_z (object acceleration is translation acceleration for a material point under consideration). Then according to (2.4), $\Phi_x^e = -m \cdot a_z$ and equation (2.6) will take the form of

$$0 = -m \times g - Kz - m \times a_z.$$

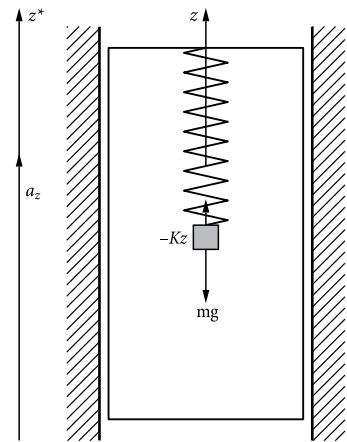


Fig. 2.7

Derive the spring force from the above equation

$$z = - \frac{m(g + a_z)}{K}. \quad (2.8)$$

This equation allows considering the following special cases:

- 1) $a_z = 0$, the object rests, and z strain is proportional to the gravitational force. That is an arrangement for a standard mechanical ring dynamometer, where body mass measurement is reduced to spring strain;
- 2) $a_z > 0$, the object moves up with acceleration, the absolute spring strain is increased, and the object observer not in contact with the environment of the object, records an increase in spring strain and takes it as an increase in the gravitational force. Subjective sensation of a person on the object (or rocket) is g-load;
- 3) $a_z < 0$, the object moves down with an acceleration, the spring strain is reduced, and the observer records a reduction in the gravitational force;
- 4) $a_z = -g$, the object moves down with an acceleration equal to the free-fall acceleration, the spring strain reduces to zero ($z = 0$), and the observer records a collapse of object gravity. This state is weightlessness.

Formula (2.8) opens up the possibility, in principle, without external information on the spring strain, to judge acceleration of an object, which, generally speaking, is the time function $a_z = a_z(t)$. As object acceleration changes, an equilibrium (2.8) position of the point also changes, and some transient occurs, after which the point is in a new equilibrium position $a_z = a_z(t)$. Transient time depends on the spring force and damping forces, which can be generated by specific dampers providing oscillation damping of the point in relation to the equilibrium position. Let us consider transient time (oscillation damping time) to be so small that the equation of the relative equilibrium of the point (2.8), where $a_z = a_z(t)$ is true for each point of time.

If to designate absolute coordinate of the object in the inertial coordinate system $Ox^*y^*z^*$ as Z and the projection of the absolute velocity of the object to z axis as V_z then

$$\begin{aligned} a_z(t) &= \frac{dV_z}{dt}; \\ V_z(t) &= \frac{dZ}{dt}; \\ a_z(t) &= \frac{d^2Z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

According to (2.8) and (2.9), we have

$$\frac{dV_z}{dt} = - \frac{mg + Kz(t)}{m}. \quad (2.10)$$

Multiplying this equation by time differential dt and integrating within some time frame $[0, t]$ we obtain

$$V_z - V_z^0 = -\int_0^t \left[g + \frac{K}{m} z(\tau) \right] d\tau, \quad (2.11)$$

where V_z^0 – object velocity at start time.

Taking into account (2.9) and time-integrating equation (2.11) once more, we derive the absolute coordinate of the object

$$Z(t) - Z^0 = tV_z^0 - \int_0^t \int_0^\xi \left[g + \frac{K}{m} z(\tau) \right] d\tau d\xi, \quad (2.12)$$

where Z^0 – initial value of the object's coordinate in the inertial coordinate system.

Formula (2.12) explains the operation principle of inertial navigation systems, which at known acceleration of the gravitational force and known initial conditions makes it possible to determine (autonomously, without supplementary information) coordinates of a translationally moving object with the double integration of the function $z = z(t)$, presenting the spring strain.

Thus, navigation devices, implementing the inertial principle of data obtaining, allow measuring only apparent parameters of the translation motion of the object of navigation. To determine actual motion parameters, it is necessary to solve the basic equation of inertial navigation, which expresses the actual acceleration of the object of navigation as a sum of apparent acceleration and gravitational force acceleration. Record this equation as

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{g}}(\bar{R}).$$

Reducing this equation to the system of two first-order differential equations, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{g}}(\bar{R}); \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \bar{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

where \bar{R} – radius-vector of the c.m. of the object; $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ – apparent acceleration vector; $\bar{\mathbf{g}}(\bar{R})$ – attractive force acceleration vector defined by a gravitational field model.

To determine current parameters of the motion of the object (its coordinates and velocity), it is necessary to integrate equations (2.13) with initial conditions $\bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{V}}_0$.

Let us consider the content of information required to solve inertial navigation problems. It is the practice to divide this information into three types: source, initial and primary.

Source information includes collection of data that remains constant during the whole cycle of solving a navigation problem and in all conditions applicable to the

use of the object of navigation. Source information is constant for ballistic missiles and launch vehicles regardless of launching conditions for this type of rockets. Source information includes:

- coordinate systems that describe the initial, intermediate and final data of the solution to a navigation problem,
- geopotential model adopted for this type of rockets,
- algorithms to integrate a basic equation of inertial navigation and to solve a navigation problem as a whole.

Let us choose the following from coordinate systems that are used to solve a navigation problem:

- measuring coordinate system, related to sensitivity axes of measuring instruments,
- geocentric relative coordinate system, where the model of the Earth's gravitational field is given,
- navigation coordinate system, where a navigation problem is solved.

Source information is a part of the so-called conservative information included into the composition of software and algorithms used in a control system of a rocket.

Initial information includes data on the initial position and initial velocity of the object of navigation as well as data on the initial attitude of sensitivity axes of INS meters in a basic inertial coordinate system. For ballistic missiles, including mobile missiles, the initial information is obtained using rocket launching astronomic-geodetic equipment and ground navigation and targeting systems.

Primary information (also referred to as measuring information) is measurement results of current parameters pertaining to the motion of the object of navigation, recorded in outputs of INS meters and transformed into the form available for algorithms used to solve navigation problems.

2.1.3. Peculiarities of GINS Application

The equations to be solved on the Onboard Digital Computer (ODC), which is a part of GINS, can be represented as

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}}) - \bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{V}} + \dot{\bar{\mathbf{w}}}; \\ \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} &= -\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{V}},\end{aligned}\tag{2.14}$$

where $\bar{\mathbf{R}}$ – vector of the object's position (geocentric radius-vector of a point), $\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt}$ – vector of the absolute velocity of the object, $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ – vector of the absolute rate of rotation of the object (vector of the angular velocity of a related trihedral),

$\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ – vector of the apparent acceleration, $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}})$ – vector of the gravitational field gradient, $\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt}$ and $\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt}$ – local derivatives of vectors $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$ to axes of trihedral rotating with velocity $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$.

It is not difficult to see that to solve equations (2.14) in the ODC, it is necessary to:

- specify the form of the function $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}})$, e.g. assume that motion is in the central gravitational field, then $g(R) = -\left(\frac{\mu}{R^3}\right)R$, where μ – gravitational parameter,
- enter information on vectors $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ and $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$,
- enter values of vectors $\bar{\mathbf{R}}_0$ and $\bar{\mathbf{V}}_0$ at initiating the system.

When the given conditions are satisfied, the equation system (2.14) can be continuously integrated in the ODC, at which output values of vectors $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$ will be obtained as their projections to axes of trihedron rotating with angular velocity $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, i.e. to related trihedron axes. If we write $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ for unit vectors of this trihedron, then output ODC signals can be compared with vectors

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{i}_c x + \mathbf{j}_c y + \mathbf{k}_c z; \\ \bar{\mathbf{V}} &= \mathbf{i}_c V_x + \mathbf{j}_c V_y + \mathbf{k}_c V_z.\end{aligned}$$

While solving the problem to determine the so-called apparent velocity and coordinates in (2.14) it will be assumed that $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}})=0$. As a result of the solved system of equations, information will be obtained on navigation parameters $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$ characterizing the motion of the object. However, the issue remains open concerning the attitude control of the trihedron $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$, which is solved in INS with the stabilized platform through elimination of signals from sensors on suspension axes.

There are two methods to determine the attitude of the trihedron $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$. The first method is based on geometric relations. Unit vectors are calculated in the ODC

$$\begin{aligned}r = \frac{\bar{\mathbf{R}}}{R} &= \mathbf{i}_c \frac{x}{R} + \mathbf{j}_c \frac{y}{R} + \mathbf{k}_c \frac{z}{R}; \\ v = \frac{\bar{\mathbf{V}}}{V} &= \mathbf{i}_c \frac{V_x}{V} + \mathbf{j}_c \frac{V_y}{V} + \mathbf{k}_c \frac{V_z}{V}\end{aligned}$$

and then, using these vectors, the orthogonal base is calculated

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \bar{\mathbf{r}}; \quad \bar{\mathbf{q}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{r}}}{|\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{r}}|}; \quad \bar{\mathbf{q}}_3 = \bar{\mathbf{q}}_2 \times \bar{\mathbf{q}}_1.$$

As vectors $\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \bar{\mathbf{q}}_3$ are determined in axes $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ of the trihedron, in doing so, matrix elements of direction cosines are reconstructed between axes $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ and the base $\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \bar{\mathbf{q}}_3$ where vectors $\bar{\mathbf{q}}_2$ and $\bar{\mathbf{q}}_3$ lie in the plane perpendicular to $\bar{\mathbf{r}}$. Any other attitude parameters can be calculated on the basis of known direction cosines.

The second method for determination of the attitude parameters is based on the application of kinematic relations and essentially assumes the ODC solution of the problem for determining the position of a solid body based on known angular velocity.

Equations to be solved in the ODC will have a different form, depending on which parameters that characterize rotation will be specified for the attitude of the trihedron i_c, j_c, k_c .

In this respect, three moments are important:

- as the absolute rate of rotation $\bar{\Omega}$ of the related trihedron is known (measured), the attitude of the trihedron will be determined with regard to the base with a constant attitude control,
- the relative position of constantly attitude-controlled (basic) and related trihedrons will be known (defined) at system initiation,
- the problem regarding the determination of attitude parameters based on known angular velocity $\bar{\Omega}$ can be solved regardless of determination problem of navigation parameters $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$.

The last circumstance is very important as it enables the approach to the construction of the algorithm for GINS operation from other positions. In case of ODC solution of equations (2.14), one has to consider the need to provide a quick response from computer/angular velocity meters as vector $\bar{\Omega}$, on which coefficients of these equations depend, can have a considerable value and change its direction with great speed. Moreover, as a result of solution of these equations, information on vectors $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$ will be obtained as signals proportional to projections of these vectors to related trihedron axes.

Presentation of navigation parameters in this form seems inconvenient for their further use in navigation and motion control (guidance).

For these reasons, development of the algorithm for GINS operation involves the sequence of operations, which assumes the calculation of attitude parameters based on measurement of the vector of angular velocity as a first step in the solution of the general problem. There are two parts to the general problem regarding the determination of attitude parameters:

- calculate attitude angles (Euler angle), the values of which are required for to control of the angular motion of the object;
- calculate direction cosines between the axes of related and basic trihedrons (the latter is important for solving of so-called problems of determining navigation parameters).

The calculation of the matrix of direction cosines between axes of related and constantly attitude-controlled (basic) trihedrons opens up a possibility to determine the vector of apparent acceleration $\dot{\bar{\mathbf{W}}}$ in axes of the latter, using the readings of accelerometers that measure this vector in related axes.

Now, vectors $\bar{\mathbf{R}}$ and $\bar{\mathbf{V}}$ can be determined in axes of the basic trihedron by solving equations

$$\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}}) + \dot{\bar{\mathbf{w}}};$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} = \bar{\mathbf{V}}.$$

As navigation parameters are slower-changing functions of time as compared to attitude parameters, then, with the considered approach for the development of the algorithm for GINS operation, one can slightly reduce requirements for ODC as a part of GINS, as relatively high performance must only be ensured in calculation of attitude parameters.

Consequently, that the problem of attitude determination has a special and even a key role in the construction of GINS.

Solution to the problem determining attitude parameters must result in the matrix of direction cosines between axes of the basis, within which the vector $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ (rigidly bound with the object) is measured, and axes of the trihedron are considered as basic. This matrix is determined using measurements as information on the vector of the absolute angular velocity of the measuring basis (formed by the axes of accelerometers) $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, with which the matrix is brought to conformity

$$|\bar{\boldsymbol{\Omega}}| = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.15)$$

where $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – projections of vector $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ to the axes of the measuring basis.

Signals from three angular velocity meters, which are structurally integrated into one unit so that their measuring axes form an orthogonal basis, are brought to conformity with values $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. During an assembly, axes of this basis are installed in parallel to axes of the accelerometer trihedron, within which the vector $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ is measured.

Practically used angular velocity meters provide information not on the vector $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ but on the so-called vector of the apparent rotation $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, which is determined by formula:

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{i}_c \int_0^t \Omega_1 d\tau + \mathbf{j}_c \int_0^t \Omega_2 d\tau + \mathbf{k}_c \int_0^t \Omega_3 d\tau,$$

where $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ – unit vectors of the measuring basis.

Signals proportional to values

$$\theta_1 = \mathbf{i}_c \int_0^t \Omega_1 d\tau; \quad \theta_2 = \mathbf{j}_c \int_0^t \Omega_2 d\tau; \quad \theta_3 = \mathbf{k}_c \int_0^t \Omega_3 d\tau,$$

which are received from associated meters, are then used as the basis in the calculator to recover values $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ and determine the vector $\bar{\Omega}$.

Thus, the problem to determine the attitude parameters (the matrix of direction cosines) is reduced to a problem, which is well known in the theoretical mechanics, i.e. to determine the relative position of two orthogonal bases according to a known angular velocity.

There are two principal methods of solving this problem:

- direct determination of the desired matrix through vector $\bar{\Omega}$;
- determination of the matrix through intermediate parameters characterizing rotation which, in their turn, are calculated using the information on the vector $\bar{\Omega}$.

The desired matrix of direction cosines $|c|$ can be directly calculated by solving a Poisson's matrix equation

$$\frac{d|c|}{dt} = |c| \|\bar{\Omega}\|, \quad (2.16)$$

where $\|\bar{\Omega}\|$ is determined based on (2.15).

In the solution of equation (2.16), the information on the vector $\bar{\Omega}$ will be received in ODC, based on which the matrix $\|\bar{\Omega}\|$ is formed. Moreover, the initial value of the matrix $|c|$ – matrix $|c^0|$ will be known at the start of the system's operation.

When applying the second method of $|c|$ matrix calculation, Rodrigo–Hamilton parameters (Euler parameters), being quaternion elements, can be calculated as intermediate rotation parameters. In calculation of these parameters, the following linear matrix equation must be solved:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_3 & \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Associated direction cosines can be calculated based on parameters $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, which are obtained solving the equation system (2.17), using the matrix equality

$$|c| = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_3\lambda_2) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{bmatrix}.$$

One can also apply the algorithm based on the use of the parameter that characterizes rotation and is called the rotation or attitude vector $\bar{\Phi}$. This vector is determined as follows:

$$\bar{\Phi} = \bar{e} \cdot \bar{\Phi},$$

where \bar{e} – unit vector of the rotation axis, around which the object (trihedron axes associated with it) is rotated at attitude change; $\bar{\Phi}$ – modulus of attitude vector.

Quantity Φ is changed within $\pm\pi$.

Differential equation, the solution of which enables to determine the vector $\bar{\Phi}$, has the form of

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} |\bar{\Omega}| \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Phi^2} \left(1 - \frac{\Phi}{2} \frac{\sin(\Phi)}{1 - \cos^2(\Phi)} \right) \times \left\{ \left(\Phi_1 \Omega_1 + \Phi_2 \Omega_2 + \Phi_3 \Omega_3 \right) \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} - \Phi^2 \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} \right\}, \quad (2.18)$$

where $|\bar{\Omega}|$ is determined based on (2.15); Φ_1, Φ_2, Φ_3 – projections of the attitude vector to the same axes; $\Phi = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2}$.

Applying associated numerical methods in the solution of equations (2.18), quantities Φ_1, Φ_2, Φ_3 can be determined. For this purpose, the information from AVS is required on quantities $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ and the initial value of the attitude vector Φ_0 .

Based on values determined in such a way, the matrix of direction cosines between the axes of object-related trihedron and axes of trihedron taken as basis can be calculated using the following matrix form:

$$|c| = |e| \cos(\Phi) - \frac{1 - \cos(\Phi)}{\Phi^2} \begin{vmatrix} \Phi_1^2 & \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_1 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_2^2 & \Phi_2 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_3 & \Phi_2 \Phi_3 & \Phi_3^2 \end{vmatrix} + \frac{\sin(\Phi)}{\Phi} \begin{vmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Comparative variety of possible methods of constructing algorithms for determination of attitude matrix raises the problem of reasonable selection of algorithms subject to implementation on ODC during the design stage of the system.

This problem will be solved taking into account some factors, such as the nature of the information received from rotation parameter meters, speed and capacity of ODC, properties of differential equation systems subject to ODC solution, etc.

2.2. Guidance

An inertial control system is constructed on the basis of a gyro stabilized platform or a control system of a gimballess inertial navigation system.

A typical inertial navigation system must include at least the following functional elements: sensing elements (gyros and accelerometers) and computing devices (on-board digital computer – computer) for keeping record of gravitational accelerations and processing data on angular and linear motion of the LV.

Gyros provide the reference system, the direction of which is known in advance with regard to the inertial space. A gyro is a device that uses the ability of a property attached and fast revolving rotor to maintain the predetermined attitude control of

its axis. A unit of three gyros installed on an object in a certain way forms the so-called stabilized element or the gyroplatform, which keeps attitude control regardless of the fact how the rocket moves.

Accelerometers are sensing system elements. A group of three accelerometers is usually installed on a stabilized platform, so that their sensitivity axes are mutually perpendicular and allow measuring the change in velocity in any direction. An accelerometer measures the vector of non-gravitational accelerations of the airframe, in which it is contained. This acceleration is called apparent and is denoted by \vec{W} .

Due to the errors peculiar to the inertial system (first of all, the gyro drift and errors in the measurement of the increment in apparent velocity) and long operating time, errors are accumulated in determined coordinates.

To compensate the INS effect of these errors, the following correlation facilities can be used:

- satellite navigation system;
- navigation responder equipment;
- astrocorrection, etc.

Information from the above facilities makes it possible to define more accurately the LV location, introduce associated amendments into INS readings and, thus, improve the accuracy of the control system.

The flight control of a launch vehicle is tasked with the spacecraft injection into a reference orbit (or detachable part – into a target orbit i.e. free ballistic flight trajectory passing through the specified target point) and a stable flight in the injection phase. Thus, in accordance with general principles of motion control, the problem of flight control is considered as a set of two interrelated problems: the guidance problem being in generation (using guidance system) of motion control programs in the powered trajectory leg and generation of one-time command to SC separation, and the stabilization problem being in development of guidance system-formed programs for control of stabilization system channels functioning as closed systems of automatic control. It is assumed that all information on the current motion parameters of the rocket, required for the functioning of the guidance and stabilization system, is obtained with the help of the inertial measuring system.

Mathematical dependences defining a desired (required) law of rocket motion, at which the assigned control goal is achieved, are called control programs.

By a guidance method, we mean the principal idea formed as a certain rule, in accordance with which the following is generated: motion control programs and one-time guidance commands (particularly command to SC separation). This rule, which is referred to as a guidance algorithm, is expressed in a closed mathematical form, suitable for practical implementation on the onboard control system. In general, the flight program should be constructed so that at any time it was possible to make corrections based on subsequent information in motion.

It is assumed that the total set of guidance methods should be subdivided into two groups depending on the content of the principle for the development of motion control programs implemented by this method. There are principles of preliminary and current programming of motion.

As the name implies, the preliminary programming of motion focuses on the generation of control programs in advance prior to the launch, and they are not changed/corrected in flight. Such programs are defined for nominal (design) flight conditions and are open control programs, as no feedback for current motion parameters is involved in the development of control programs.

Open control programs are also called stiff or time programs as they are expressed as a function of the current flight time, calculated from the time of the rocket launch. The peculiarity of stiff control programs is that they specify one and the same law of rocket motion regardless of disturbances affecting a rocket under real flight conditions. It is conventional to say that in this type of control programs, the motion is programmed along a strict trajectory, although a real trajectory can differ greatly from the programmed trajectory due to disturbance effects.

Within the bounds of the principle of preliminary programming of motion, the so-called flexible or parametric programs can be generated. In such programs, one or another parameter of rocket motion is an independent variable rather than time. Projection of the vector of apparent velocity of a rocket to its longitudinal axis or vertical axis of the launch coordinate system is usually selected as such parameter. Flexible programs in the nominal flight conditions are identical with stiff programs, i.e. they specify the same law of motion. The difference of flexible programs becomes apparent under real flight conditions, i.e. they depend on parameters of the current motion subjected to disturbance effects. Therefore, the law of rocket motion specified under a parametric program is changed under real flight conditions depending on the level and pattern of disturbances. In this case, a rocket flight is performed along a flexible trajectory.

The advantage of flexible control programs as compared to stiff programs is in the fact that their application allows narrowing a disturbed trajectory tube of a rocket flight in a definite way. It facilitates the solution of the record-keeping problem of limitations on allowable parameters of motion of launch vehicles and, under known conditions, reduces methodical errors of guidance.

One-time guidance commands generated within the bounds of the principle of preliminary programming of motion are divided as control programs into two types of commands: program timing and functional commands. Moments, when program timing commands are issued, are identified prior to the launch of a rocket and are strictly time-fixed regardless of real disturbed flight conditions. The commands are open control. With other time commands, they are combined into the timeline of prelaunch and launch operations.

Functional commands of control are generated based on the principle of feedback and are closed control commands. The commands are issued based on achieved value of a certain control function, which is defined according to the launch conditions. The command for the SC separation, which is generated with the help of the ballistic control function, is a typical example of a functional command of guidance. Moments, when a functional command of guidance is issued, depend on current parameters of rocket motion, and under real flight conditions they differ from their nominal values due to disturbance effects.

In case of current motion programming, control programs are defined directly in flight and generated based on the principle of feedback, i.e., they are closed control programs. Consequently, one-time guidance commands are generated in the same way as closed control commands and so are functional commands.

The principle of current programming covers a great number of different methods of guidance for both ballistic FVs and other types of flying vehicles.

Guidance methods that implement the principle of preliminary programming of motion (both with rigid and flexible programs) were named functional guidance methods. This name reflects the circumstance that in guidance under predetermined programs, the single task is placed on the onboard guidance system – the generation of one-time command for SC separation. In its turn, guidance methods for implementation of the principle of current programming of motion (e.g. method of required velocity) were named “terminal methods”, i.e. those solving the control problem of the final or terminal state of controlled object.

2.2.1. Functional Methods of Guidance

Any orbital parameter (particularly, the LV flight range – D) is unambiguously determined by parameters pertaining to the motion of the centre-of-mass of a rocket at PS cutoff (t_k)

$$L = L \left[x(t_k), y(t_k), z(t_k), V_x(t_k), V_y(t_k), V_z(t_k) \right].$$

By changing any parameter at the point of engine cutoff, one can affect the value of the flying range to some extent.

The problem of range control is in determination of such moment of engine cutoff t_k , at which rocket motion to the desired orbit (range) will be provided.

A set of nominal motion parameters \hat{q}_{i_k} ($i = x, y, z, V_x, V_y, V_z$) at the nominal moment \hat{t}_k of engine cutoff corresponds to the required trajectory.

When the control system provides a real motion of the rocket that at moment $t_k = \hat{t}_k$ the following equality is observed

$$q_i(t_k) = \hat{q}_i(\hat{t}_k), \quad (2.19)$$

thereby, the required (desired) orbit (range) will be reached

$$L = \hat{L} \left[\hat{q}_i \left(\hat{t}_k \right) \right] \quad (2.20)$$

and the control problem will be solved.

Such approach for a range control places very strict requirements on the real motion of the rocket in the programmed leg (which must be designed); therefore, it can be implemented only by a complex control system.

The real motion of a rocket is affected by major disturbing factors that result in the violation of the condition (2.19) at the moment t_k .

It is evident that the required value of function (2.20) is satisfied not only by the design set of parameters (2.19) but also by many other sets $q_i \ t_k$.

Due to the uniqueness of each specific disturbed trajectory, only one set of parameters $q_i(t_k)$ ensures the required (orbital) range.

Within the problem of range control, it is necessary to find a solution (moment t_k) satisfying the control equation

$$L \left[q_i \ t_k \right] - \hat{L} \left(\hat{t}_k \right) = 0. \quad (2.21)$$

Due to the random nature of rocket disturbances, moment t_k cannot be predetermined. Evidently, there is a need for continuous measurement of parameters $q_i(t)$ and calculation of the current flight range $D(t)$, which would be reached by the rocket with cutoff engine at the moment t under review.

Having considered that the control system provides a sufficiently small deviation of current motion parameters from their design values

$$\Delta q_i(t = q_i \ t - \hat{q}_i \ t), \quad (2.22)$$

range function $D(t)$ can be expanded into a Taylor series about the design moment of engine cutoff t_k and motion parameters satisfying the required values $q_i(t_k)$:

$$\begin{aligned} L(t = \hat{L}[\hat{q}_i \ \hat{t}_k]) + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \Delta q_{i_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial q_{i_k}^2} \right) \Delta q_{i_k}^2 + \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^6 \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial q_{i_k} \partial q_{j_k}} \right) \Delta q_{i_k} \Delta q_{j_k} + R_D, \end{aligned} \quad (2.23)$$

where R_D – remainder term of the expansion.

In view of the relative smallness of nonlinear expansion terms, let us neglect their value. Inserting expression (2.23) into control equation (2.21) we will obtain

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \Delta q_{i_k} = 0. \quad (2.24)$$

By inserting the expression into this relationship for $\Delta q_i(t)$ (2.22), we will obtain

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \hat{q}_{i_k}(\hat{t}_k) = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) q_i(t_k) . \quad (2.25)$$

It is evident that both control equation (2.21) and equalities (2.24) or (2.25) express one and the same essence of the control, i.e. a zero deviation of the real flight range from the required one is ensured at PS cutoff.

It should be noted that such kind of statement is not strict with respect to equality (2.24) as it is obtained when non-linear terms neglect $D(t)$ function expansion into a Taylor series.

Coefficients $\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right)$ are called ballistic derivatives. They characterize the deviation of the range deviation at the deviation of associated parameter $q_i(t_k)$ by its unit $\Delta q_{i_k}(t_k) = 1$.

The derivative analysis shows that variations of the motion parameter in the firing plane (x, V_x, y, V_y) have the greater effect on range deviations as compared to variations of the side motion parameter (z, V_z). This feature permits controlling the range only for four parameters of longitudinal motion. Consequently, the control system must be designed so that lateral deviations from the firing plane will be continuously reduced to zero.

The function of motion parameters Φ , which is used to determine the PS cutoff moment, is called the control function or control functional. It is evident that the control function shall be in one-to-one accordance with the flight range, i.e. one range value corresponds to each specific value of the control function and vice versa.

No single common method exists to determine the type of control function $\Phi(t)$. But the simpler is the function, the easier is its instrumental implementation. At the same time, the fewer motion parameters it takes into account and the rougher this record-keeping is, the less is its correspondence to the real flight range and, and as a result, the higher error is in range control.

The simplicity of instrumental implementation is an advantage of functional guidance methods. However, the acceptable guidance accuracy is reached providing LV motion in a small neighbourhood of the programmed trajectory, for which systems are used to control the centre-of-mass motion of an LV: longitudinal, normal and lateral components of phantom velocity.

2.2.2. Terminal Guidance

The principal difference of a terminal guidance method from a functional one is in the fact that the flight control program is calculated not once before launch by stationary ODCs but many times in flight by the onboard computer based on data on current parameters of LV motion and required target function, e.g. the orbit.

In terminal guidance, the principle of current programming of motion is implemented, in which control programs are closed and are calculated directly during the flight, based on the velocity required for the implementation of specified edge conditions. As the notion of required velocity refers to the active flight leg, a method of the required velocity perfectly corresponds to the guidance of ballistic missiles. It can also be applied to the guidance of other types of FVs with a passive flight phase, e.g. space launch vehicles, spacecrafts for interorbital or interplanetary flight, etc. This method is unsuitable for the guidance of FVs, whose control flight continues up to the collision with the target (anti-aircraft missiles, air-to-air and air-to-surface missiles and cruise missiles).

The idea of the method of required velocity was expressed first in the 50s. Since then, this method has been intensively developed and is known available in different versions. The US experts under the direction of R. Battin contributed substantially to the development of this method. In the USA, this method was first developed as a version of the so-called Q-system and then, it was applied in the modified form to the control system of the SC Apollo. The algorithmic simplicity of the Q-system made it possible to implement this method in analogue CSs without ODC application on the first generation of Tor and Polaris ballistic missiles. However, this advantage of the Q-system was depreciated to a great extent by an essential disadvantage being in an extremely labour-intensive problem of Launch Data preparation and a great scope of Flight Task that complicated application of the above method to mobile-based rockets.

With the advent of ODC, it has become possible to change substantially the algorithmic substance of the method of required velocity and to simplify substantially the problem of the Flight Task design. This allowed solving the problem of effective application of this guidance method on mobile rocket complexes capable of launching rockets from any point of combat patrolling route.

This method is known in two versions:

- the method of the current required velocity,
- the method of the final required velocity.

Theoretical footing of the methods is given in (Разоренов, Бахрамов, Титов 2003). End formulas required for understanding of the essence of methods under consideration are given below.

The terminal guidance conditions for all methods are determined in a standard way

as zero miss conditions (e.g. SP impact point from targeting point) specified by equations

$$\begin{aligned}\Delta L(r_p) &= 0; \\ \Delta B(r_p) &= 0.\end{aligned}\tag{2.26}$$

at the moment of condition fulfilment

$$r(t) = r_p.\tag{2.27}$$

Let us consider the velocity at time t with a known position $r(t)$ as the required velocity \bar{V}^{rv} , at which, in the case of PS nulling and FV separation at the time considered, the trajectory of further motion would be the target trajectory. The required velocity is ambiguously determined by two conditions. Really, it is evident from the physical pattern of motion that there exists a family of target trajectories beginning from this space point and passing through specified targeting point. Accordingly, there exists a great number of different vectors of the required velocity. To determine the single vector of required velocity, it is necessary to place an additional requirement on the target trajectory by widening the composition of guidance conditions. Either the total time of the SP flight up to impact point

$$T(r_p) = T^s,\tag{2.28}$$

or the re-entry angle of the SP

$$\vartheta_{ar}(H_{ar}) = \vartheta_{ar}^s.\tag{2.29}$$

is given most often as such additional conditions.

Thus, target conditions (2.26) jointly with one of additional conditions (2.28) or (2.29) unambiguously determine the required velocity at any point of the motion trajectory of a rocket.

Method of the Current Required Velocity

By its definition, the required velocity is a coordinate function of the considered space point, i.e. the vector $\bar{\mathbf{r}}$. Moreover, due to the displacement of a target point in the absolute space because of the Earth's rotation, the required velocity depends explicitly on the current time. One may also note that the explicit dependence of the required velocity on time takes place by giving the terminal condition (2.28), disregarding the Earth's rotation. Then, we assume that in a general case, the required velocity is coordinate and time function $\bar{V}^{rv} = \bar{V}^{rv}(t, \bar{\mathbf{r}})$.

Assuming that there is a possibility to calculate the current value of the required velocity aboard the rocket in real time the difference can be found between the required velocity and the current rocket velocity

$$\Delta \bar{V}^{rv} = \bar{V}^{rv} - \bar{V}(t).$$

The required velocity increment $\Delta \bar{V}^{rv}$ shows what an additional velocity increment is to be imparted to a rocket to reach SC separation. Further control of rocket motion i.e. selection of program pitch and yaw angles, which define PS thrust vector direction, will be implemented in such a way as to reach the missing velocity $\Delta \bar{V}^{rv}$, and the PS thrust cutoff and SC separation should be done during the moment of the nulling of the vector $\Delta \bar{V}^{rv}$. In practice, the requirement for equality to zero of the module of the required velocity increment is substituted for inequality

$$|\Delta \bar{V}^{rv}| \leq \varepsilon, \quad (2.30)$$

where ε – preselected small quantity defined by an allowable methodical error in guidance.

Accordingly, the idea of guidance is actually rather simple. However, its practical implementation encounters great difficulty connected with the necessary calculation of the current required velocity in real time. Thus, the allowable delay in the determination of the required velocity must not exceed hundredths of a second. When it is considered that for the calculation of the required velocity it is necessary to solve the appropriate boundary problem for a differential equation system that describes the SC flight in the passive trajectory leg, taking into account the atmospheric motion, then it will become evident that it is difficult to solve the problem for the time not exceeding the allowable delay in the calculation of the required velocity even with the use of a high-performance ODC.

It has been possible to overcome this difficulty in the version of the method referred to as the Q-system in the US literature. Let us consider the essence of this version of the method.

The following differential equation for the extra velocity is the basis of the Q-system

$$\frac{d\bar{V}_D}{dt} = -\dot{\bar{W}} - Q\bar{V}_D, \quad (2.31)$$

where $\dot{\bar{W}}$ – apparent rocket acceleration due to PS thrust force; Q – square matrix of the third order formed through partial derivatives from components of the vector of the current required velocity based on coordinates of the current space point:

$$Q = \frac{\partial \bar{V}_{rv}}{\partial \bar{r}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_X^{rv}}{\partial X} & \frac{\partial V_X^{rv}}{\partial Y} & \frac{\partial V_X^{rv}}{\partial Z} \\ \frac{\partial V_Y^{rv}}{\partial X} & \frac{\partial V_Y^{rv}}{\partial Y} & \frac{\partial V_Y^{rv}}{\partial Z} \\ \frac{\partial V_Z^{rv}}{\partial X} & \frac{\partial V_Z^{rv}}{\partial Y} & \frac{\partial V_Z^{rv}}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

Equation (2.31) presents a linear differential equation relative to the extra velocity vector. This equation allows calculating the current values of the extra velocity vector

without estimation of the required velocity. For this purpose, this equation will be integrated in real time with associated initial conditions defined by initial and terminal guidance conditions. To integrate the equation, it is necessary to have measurement results for the vector of the apparent acceleration of the rocket as well as information on values of Q matrix elements in current points of the motion trajectory. Since it is unreal to calculate Q matrix elements directly during the rocket flight, the problem must be solved prior to the rocket launch, and data on Q matrix elements must be entered into the onboard CS storage as a part of Flight Task.

The distinctive feature of equation (2.31) is that it contains no gravitational acceleration vector. This gives a deceptive impression that the task regarding the calculation of extra velocity is independent of the gravitational field model. Actually, the information on the gravitational field model is reflected in elements of the Q matrix. The other significant feature of this equation is that although the extra velocity vector is determined in real motion parameters, we need information only on the apparent acceleration of the rocket to solve this equation. Thus, Q – system – the variation of the method of required velocity – does not require to determine the real motion parameters and integrate the basic equation of inertial navigation.

It is evident that the vector \bar{W} is to be directed so that to provide reducing modulus of extra velocity and nulling it.

The condition of reduction in the extra velocity vector \bar{V}_D is negativeness of its derivative

$$\dot{\bar{V}}_D < 0, \quad \left(\dot{\bar{V}}_D = \frac{d\bar{V}_D}{dt} \right).$$

Among allowable directions of the vector \bar{W} , it is expedient to select the energy-optimal direction for the criterion of minimum fuel consumption during the control of the rocket motion in the active trajectory leg or, that is equivalent to the criterion for the minimum time required for nulling the extra velocity modulus. The direction of the \bar{W} vector is selected so that the vector \bar{V}_D is contrary to the vector direction \bar{V}_D . This condition can be formulated as zero equality of the vector product

$$\dot{\bar{V}}_D \times \bar{V}_D = 0.$$

The optimality study of such control (Разоренов, Бахрамов, Титов 2003) shows that it is not optimal for the criterion of the minimum fuel consumption.

The optimal direction of the thrust vector (unit vector \bar{e}_W , which determines the direction of the thrust vector and the longitudinal axis of the rocket) can be determined in accordance with the following expressions:

$$\bar{e}_W = \frac{1}{\bar{W}} (\gamma \bar{b} + \beta \bar{e}_D);$$

$$\beta = \sqrt{\dot{W}^2 - \gamma^2 \left[b^2 - (\bar{e}_D \cdot \bar{b})^2 \right]} - \gamma (\bar{e}_D \cdot \bar{b}); \quad (2.32)$$

$$\bar{b} = -Q \cdot \bar{V}_D,$$

where γ – control parameter, which can be changed from 0 to 1.

The value of fuel consumption γ , which is optimal according to the minimum criterion, is determined by control simulation under specified launch conditions.

Guidance is implemented in the following way:

- program values of pitch and yaw angles are determined during the flight by the orientation of the vector $\bar{e}_{\dot{W}}$, which is defined by expression (2.32) where \dot{W} – measured value of the vector modulus of the apparent acceleration;
- the moment of PS thrust nulling and SP separation is determined by the condition of zero equality of the extra velocity modulus, if to be more exact, by the condition (2.30) of infinitesimality of this value.

It is necessary to note the simplicity, with which the algorithm for the command for SC separation is generated. Unlike the functional guidance method, it has no problem as to separate the control of flight range and direction. Moreover, simultaneous implementation of three terminal guidance conditions is ensured.

Method of the Terminal Required Velocity

A method of guidance based on terminal required velocity presents the modification of the method of the current required velocity. The essence of modification is to get over a major difficulty preventing practical implementation of the method of the current required velocity, i.e. the need for high-precision determination of the required velocity in real time with a minimum delay that does not exceed hundredths of fractions of a second.

Guidance by this method is implemented in two control loops:

- the correction loop,
- the guidance loop.

In the correction loop, functioning at regular intervals with period T , prediction analyses of rocket motion parameters are done at the predicted moment of termination T , and the boundary problem is solved on determination of correction $\Delta \bar{V}^{(j)}$ – required increment in the apparent velocity (here j – correction cycle number).

The process of successive refinement of the terminal apparent velocity and, accordingly, a required increment in the apparent velocity is described by the following relations

$$\bar{W}_k^{(j+1)} = \bar{W}_k^{(j)} + \Delta \bar{V}_k^j, \quad \bar{W}_k^{(j)} = \bar{W}_k^p, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\Delta \bar{W}_k^{(j+1)}(t) = \Delta \bar{W}_k^{(j)}(t) + \Delta \bar{V}_k^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Prediction analyses of rocket motion parameters are in integration of the following equations over the interval $[t_j, t_k^{(j)}]$

$$\dot{\vec{V}} = \dot{\vec{W}} + \vec{g}(\vec{r}),$$

where t_j – start of the next correction cycle; $t_k^{(j)}$ – predicted moment of PS thrust nulling.

Parameters $\vec{r}(t_j)$, $\vec{V}(t_j)$, whose values are obtained based on the information of the navigation measuring system, are taken as initial conditions. Time interval $t_k^{(j)} - t_j$, which remains prior to PS thrust nulling, is estimated based on the required increment in the apparent velocity $\Delta \vec{W}_k^{(j)}(t_j)$. Program values of pitch and yaw angles in the prediction interval are supposed to be constant and equal to their values determined at the start of the current correction cycle for the attitude of the vector $\Delta \vec{W}_k^{(j)}(t_j)$. Thus, the algorithm of cyclic prediction of rocket motion in the remaining PTL and correction of the terminal required velocity is closed by a feedback loop for actual motion parameters, which provides the compensation of effecting disturbances and convergence of the iterative process for the refinement of final motion parameters to their values, at which the desired terminal guidance conditions are implemented with required accuracy.

In a guidance loop with a minor period divisible by the ODC cycle time, program values of pitch and yaw angles are calculated for the current attitude of the vector of the required increment in the apparent velocity $\Delta \vec{W}_k^{(j)}(t_j)$. At the same time, the condition $|\Delta \vec{W}_k^{(j)}(t_j)| \leq \varepsilon$ is verified, in whose implementation the command to PS thrust cutoff and SC separation is executed.

Methodical mistakes of the method are determined by errors in the prediction of parameters of the rocket motion at PS thrust nulling (prediction errors) and errors in solving the boundary problem on refinement of the terminal required velocity (errors in terminal velocity correction). Prediction errors are determined by errors of the gravitational field model in rocket motion equations for PS thrust nulling, errors in the method of numerical integration of motion equations at the prediction interval and by the disturbance effects. Due to the cyclical repetition of prediction procedure using real values of the current rocket motion parameters, the effect of the above factors becomes apparent only over a short period of time directly preceding the SC separation, whose duration does not exceed the duration of the correction cycle T . With the reduction in the period T , the prediction errors are decreased and at within the limit when $T \rightarrow 0$, they also tend to zero.

Methodical mistakes of the guidance method determined by errors in the terminal velocity correction directly depend on the accuracy of mathematical models of SC motion in the non-powered flight leg (particularly, on the accuracy of the

gravity potential model and the accuracy of the atmospheric model, in the motion equations in atmospheric portion). Moreover, these errors depend on the accuracy of the method used for numerical integration of motion equations. In case the guidance method has no compensation mechanism for such errors, the increase in the accuracy of SC motion models in the non-powered trajectory leg is the only method that allows decreasing the number of methodical errors in this part of guidance.

In terminal guidance methods, the endpoint is singular. It generates a need for pre-termination of calculations according to an iterative circuit (quenching of its individual parameters and, possibly, angle programs just before SC separation). In this case, the control loop is open, which causes an increase of miss (injection error). The above peculiarities require the introduction of motion control systems of centre-of-mass of lateral and normal velocity components into the control loop, which provide the required accuracy.

Guidance by the Method of Required Accelerations

Method of required accelerations implements the control concept based on the solution of the inverse dynamics problem. A direct problem is in motion determination of a material object under the action of forces applied to it. The law of variation of those is assumed as specified. The inverse dynamics problem is to determine the law of variation of forces applied to an object, at which the specified motion of the object is implemented. So, the control problem is posed and solved in the case under consideration, i.e. based on the desired law on the motion of the object motion selected from problem conditions and expressed as a program for its acceleration variation. Such control forces are determined using dynamic motion equations, which implement the specified motion of the object jointly with other forces acting on the object.

Theoretical foundations of the principles for the development of a control algorithm and solution of the inverse dynamics problem are developed in works by Academician B. N. Petrov and his colleagues (e.g. (Петров *et al.* 1983)). Applied aspects of the method of the required accelerations are reflected in many publications, among which we should emphasize a monograph by A. P. Batenko (1977), where movable objects reveal both the essence of the method of the required accelerations and its significant features by simple examples of some control problems.

Consider the content of the method of required accelerations with reference to the following mathematical model of a controlled object specified as a set of kinematic and dynamic motion equations:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2; \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) + \bar{\xi},\end{aligned}\tag{2.33}$$

where \bar{x}_1 – vector of the object's position ; \bar{x}_2 – its velocity vector; $\dot{\bar{x}}_2$ – object

acceleration determined by forces applied to it, among which control forces are determined by k-measured vector of control parameters \bar{u} ; $\bar{\xi}$ – vector of random disturbances.

Let \bar{x} denote the vector of phase coordinates of the controlled object formed by vectors \bar{x}_1 and \bar{x}_2 , $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$.

It is important to consider that in the general case, control parameters are subject to limitations in the form of two-sided inequalities

$$u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max}, j = 1, \dots, k.$$

The control problem is in the transfer of the object from the pre-set initial condition $\bar{x}_0 = \{\bar{x}_{10}, \bar{x}_{20}\}$ corresponding to the initial time $t_0 = 0$, to the final condition $\bar{x}_k = \{\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}\}$ during time T, which can be both fixed and free depending on the formulation of the problem. Moreover, one or the other optimality requirement can be placed on the trajectory of controlled motion from the maximum or minimum condition of a certain criterial function $J(\bar{x}, \bar{u})$.

A solution of the control problem by the method of required accelerations consists of two phases. In the first phase, the required trajectory of motion of the controlled object is in the phase space, which satisfies specified boundary conditions, optimality criterion and condition limitations. Denote the required motion trajectory determined by the law of variation of parameters \bar{x}_1 and \bar{x}_2 as follows:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1^{rv}(t) &= \varphi_1(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t); \\ \bar{x}_2^{rv}(t) &= \varphi_2(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t).\end{aligned}$$

It is apparent that in view of kinematic motion equations, the following equality is true:

$$\dot{\bar{x}}_1^{rv}(t) = \bar{x}_2^{rv}(t).$$

Having differentiated the time vector $\bar{x}_2^{rv}(t)$, we obtain the law of variation of the object acceleration corresponding to the required trajectory of its motion

$$\dot{\bar{x}}_2^{rv}(t) = \frac{d\varphi_2(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t)}{dt}.$$

Let us refer to the function $\dot{\bar{x}}_2^{rv}$ as the program for required accelerations of the controlled object.

In the second phase of the problem solution, it is necessary to determine control parameters $\bar{u}(t)$, forming such control forces, which provide program variation of required accelerations and object motion along the trajectory leading to the specified point.

The exact implementation of the programmed trajectory can be provided only when control parameters satisfy dynamic equations, in which the disturbance effect

has been taken into account

$$\dot{\bar{x}}_2^{rv} = \bar{f}[\bar{x}_1^{rv}(t), \bar{x}_2^{rv}(t), \bar{u}(t)] + \xi(t). \quad (2.34)$$

It is evident that it is impossible to determine parameters $\bar{u}(t)$ from equations (2.34), since disturbances $\bar{\xi}$ a priori are unknown and usually are not subject to direct measurements. Instead of this, real acceleration of the object can be measured, and the problem on control determination $\bar{u}(t)$ can be posed based on information on the difference between the programmed and real object accelerations $\Delta\dot{\bar{x}}_2^{rv} = \Delta\dot{\bar{x}}_2^{rv}(t) - \Delta\dot{\bar{x}}_2^a$.

Let us record the control determination algorithm $\bar{u}(t)$ based on information on the value $\Delta\dot{\bar{x}}_2$ in the form of the following operator:

$$\bar{u}(t) = F_t[\Delta\dot{\bar{x}}(t)]. \quad (2.35)$$

The development of control algorithms in the form of (2.35), which provides a sufficiently exact implementation of the programmed trajectory, is possible in principle. In practice, however, such algorithms are irrational as they place too strict requirements on the control system, which must provide the motion of the controlled object along a nominal trajectory at any disturbances affecting the object. The requirements can be reduced when required control parameters are determined from the condition, not of exact but approximate implementation of the programmed trajectory.

Another approach to the determination of control parameters has gained ground in the practice of control of movable objects, which is based on the solution of dynamic equations for the undisturbed motion of the controlled object

$$\dot{\bar{x}}_2^{rv} = \bar{f}[\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{u}(t)]. \quad (2.36)$$

Vector equation (2.36) is called the defining equation. As we can see, disturbances are omitted here unlike in (2.35). Let us record the defining equation of the solution algorithm in the form of the following operator:

$$\bar{u}(t) = F_2[\dot{\bar{x}}_2^{rv}(t), \bar{x}(t)]. \quad (2.37)$$

Disturbance effects are recorded in an indirect way through constant or periodic recalculation of the required motion trajectory and required acceleration program based on the information on real motion parameters obtained from the navigation and measurement system. In this case, the required motion is determined by dependences

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{rv}(t) &= \varphi_1(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t); \\ \bar{x}_2^{rv}(t) &= \varphi_2(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

and the required acceleration program by expression

$$\dot{\bar{x}}_2^{rv}(t) = \frac{d\varphi(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t)}{dt}. \quad (2.39)$$

Note that in the calculation of control parameters that define the required values of control forces, the values of other forces acting on the object are calculated based on parameters of the actual object motion at a current time. This circumstance is reflected in formulas (2.37–2.39), right parts of which contain object motion parameters $\bar{x}(t)$ obtained from measurements.

Thus, we have a closed law of control formed on the principle of feedback and providing the variation of the controlled object to the final condition within a terminal time.

In constant recalculation of the required acceleration program without delay and measurement errors, the method provides the exact specified final condition. In periodic recalculation of the acceleration program, there appears a methodical control error, whose value is determined by the duration of program recalculation period and the level of affecting disturbances.

The selection of a proper procedure for determining the required acceleration program is the key problem of this method. Generally speaking, this problem can be posed and solved by the same procedure as in the functional method of guidance within the principle of motion pre-programming i.e. based on complete motion equations, taking into account control limitations and optimality requirements. However, this approach to the problem solution does not allow forming closed laws of control as constant recalculation of required acceleration programs in real time based on complete motion equations is an unfeasible problem due to a limited speed of the onboard computer. For this reason, simplified or formal motion models are used in practice.

The solution to this problem is the simplest when the required acceleration programs are set by power polynomials. In this case, closed laws of control are expressed through very simple dependences. However, applying formal models in the form of power polynomials puts in the forefront the problem of control program implementation at the existing limitations on control actions. To solve the problem, it is necessary to construct controllability and attainability domains, in which limits guidance problems can be solved based on synthesized programs. In the end, the control program is implemented through the associated narrowing of the area of terminal conditions of the controlled object, received from the specified initial condition.

Chapter 3

INJECTION ACCURACY

We take the term “injection accuracy” to mean the deviation of actual motion parameters from their design values at the moment of the separation of spacecraft or used stage.

When firing at ground targets, random deviation of the impact point of a re-entry vehicle from the target is characterized by two random quantities, namely, abscissa and ordinate of the impact point in some coordinate plane called a dispersion plane.

SC injection accuracy is described by two groups of disturbing factors. The first group is characteristic of a group deviation (general for all rockets of one launching device). The second group is characteristic of an individual error of each rocket.

The deviation because of the effect of the first group of errors is determined as firing accuracy or as preparation errors of initial data on rocket launch; the second – as a close grouping of shots or technical dispersion.

The following is referred to as errors of initial data preparation:

- ballistic preparation errors (initial conditions of SC motion);
- meteorological preparation inaccuracies (local atmosphere);
- errors in initial geophysical data (launch point coordinates, deviations of the vertical, gravity).

Technical dispersion is determined by the effect of:

- control errors in the powered leg of rocket flight;
- errors in thrust cutoff and SC separation system;
- disturbances in the atmospheric portion of free flight.

Dispersion of osculating orbital elements at SC separation (semi-major axis, eccentricity, inclination, longitude of the ascending node, perigee attitude, etc.) is usually used as monitoring parameters characterizing the accuracy of SC injection.

It is the practice to characterize the open orbit injection accuracy (the impact accuracy of the separable part) with two parameters: point shift of the orbital intersection with the Earth’s surface in the orbital plane (range deviation) and the shift in the plane perpendicular to the orbital plane (lateral deviation).

3.1. Definitions

Monitored parameter – a random quantity, on which accuracy characteristics, defined limitations (requirements) are imposed.

Accuracy characteristics – numerical characteristics of a random quantity (shift, dispersion).

Shift – mathematical expectation $\bar{\Delta}$ of measurement results based on the complex of tests, which is defined by calculation completeness in preparation algorithms of data on verification of factors affecting the shift.

Dispersion – mean square deviation of measurement results based on the complex of tests due to disturbing factors, whose calculation through preparation algorithms of data on verification seems to be impossible.

Measurement result – deviation of monitored parameter from calibrated (design) value based on test results.

Extreme deviation – confidence estimation of absolute deviation for a random quantity:

- for normal distribution of random quantity, an extreme deviation is determined by the equality

$$\Delta \leq K_B \times \sigma,$$

$K_B = 3.0$ – for the confidence probability of 99.7%;

$K_B = 2.81$ – for the confidence probability of 99.5%;

$K_B = 2.7$ – for the confidence probability of 99.3%;

$K_B = 2.33$ – for the confidence probability of 98.0%;

- for modulus of the normal distribution of a random quantity, the value defined by the following expression is confidence estimation of the absolute deviation

$$\Delta \leq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + K_B \cdot \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} \right) \cdot \sigma.$$

Osculating orbit – a contacting orbit (Keplerian orbit) at a pre-set time (SC separation).

Correction – a deviation of the monitored parameter from the design value due to a disturbing factor revealed but unaccounted for in preparation algorithms of data under test (launch).

3.2. Statistical Parameters

An event is any fact, which can or cannot occur based on the experience.

An event, which in definite conditions:

- occurs without fail is called the sure event;
- cannot occur is called the impossible event;
- can or cannot occur is called the random event.

A probability is a numerical characteristic of admissibility of occurrence of the event in specific conditions, which can be repeated without a limit. A probability of occurrence of a specified event may be discussed only in the framework of a certain test.

A probability is a numerical characteristic of admissibility of occurrence of the event, which is denoted $P\{A\}$, and usually, the index $\{A\}$ is not presented.

The probability of a sure event equals one, and that of an impossible event equals zero. The following inequality is true for a random event

$$0 \leq P\{A\} \leq 1.$$

The event \bar{A} , consisting in the fact that event A is not exercised by the experiment, is regarded opposite for the event A . Probabilities of opposite events are related by the relationship

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}.$$

When the probability of occurrence of one event does not depend on the fact whether the other event has happened or not, such events are called independent. Otherwise, events are called dependent.

The probability of occurrence of the event A , provided that the event B has happened, is denoted by $P\{A|B\}$ and is called the conditional probability of the event A .

The degree of dependence of events is measured by the regression and correlation coefficients:

- the regression coefficient of the event B with regard to the event A

$$\rho(B, A) = P\{B|A\} - P\{B|\bar{A}\} = \frac{P\{AB\} - P\{A\}P\{B\}}{P\{A\}P\{\bar{A}\}};$$

- the regression coefficient of the event A with regard to the event B

$$\rho(A, B) = P\{A|B\} - P\{A|\bar{B}\};$$

- the correlation coefficient of events A and B

$$r(A, B) = \sqrt{\rho(A, B)\rho(B, A)} = \frac{P\{AB\} - P\{A\}P\{B\}}{\sqrt{P\{A\}P\{\bar{A}\}P\{B\}P\{\bar{B}\}}}.$$

The regression/correlation coefficient does not exceed one by absolute value and becomes zero for independent events.

Quantity, whose value is randomly changed on the experience-to-experience basis, is called the random quantity (RQ). Unlike non-random quantities, it is impossible to predict how RQ will change under definite conditions. It is only possible to indicate the law of RQ distribution.

The law of RQ distribution is considered established when:

- a set of possible RQ values is indicated;

- a method is indicated for the quantitative determination of probable RQ fall within the arbitrary region of this set.

Setting of RQ probability distribution function, which is called the RQ distribution function in short, is the most common method used to determine probabilities of different RQ values.

X RQ distribution function is the function $F(x)$, which sets the probability of the event $X < x$, i.e. the probability that RQ X would be less than some number x :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

The distribution function is a total RQ characteristic. However, individual numerical parameters characterizing essential parts of RQ distribution are used more often. Such numerical parameters are as follow:

- the mathematical expectation (ME) characterizes the average value (\bar{X}) of RQ;
- the dispersion (D_x) characterizes the RQ dispersion with regard to its ME.

In practical problems, dispersion is more frequently characterized by the mean square deviation, σ – MSD

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}.$$

In nature, there is a wide spread of RQs, which represent a sum of a large number of independent RQs, and dispersions of the latter are small as compared to the dispersion of the total sum.

The effect of each individual source of error on the end result of the system error can be determined based on the central limit theorem. This theorem states that the sum of a large number of independent random quantities will follow approximately the normal law of distribution, regardless of the marginal distribution followed by individual components. The mean square deviation of the sum σ_Σ , which equals the square root of the square sum of the mean square deviations of components, will be the parameter of the above law

$$\sigma_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

In the shooting theory, dispersion is often characterized by the **probable** (mean) deviation E . Its name is explained by the fact that probabilities of RQ deviation from the centre of dispersion by the value less than E and the value higher than E are equal

$$E = \rho \cdot \sqrt{2} \sigma \approx \frac{2}{3} \sigma;$$

$$\rho = 0,4769.$$

The value, at which probability P to obtain deviations with the high absolute value is rather small, is taken as the maximum deviation Δ . This value is also related to the mean square deviation σ through some constant coefficient of proportionality. Thus, at $\Delta = 2.698\sigma$, the probability P equals 0.007 and at $\Delta = 3.0\sigma$, the probability $P = 0.003$.

Thus, the maximum deviation is a conventional notion but it is rather convenient for practical purposes if one remembers well about its meaning.

It is the practice to characterize the accuracy of injection to open orbits (the dispersion of impact points of separable parts of LV) by two parameters: range deviation L and lateral deviation B .

In such case, dispersion is subjected to normal bivariate distribution with numerical characteristics

$$MO_L = \Delta \bar{L}; MO_B = \Delta \bar{B};$$

$$D_L = \sigma_L^2; D_B = \sigma_B^2.$$

If the mean square of range and lateral deviations are equal,

$$\sigma_L = \sigma_B = \sigma,$$

normal bivariate distribution is called the circular distribution (dispersion) and σ is called the radial mean square deviation.

A circular probable deviation (CPD) is the radius of the circle (r_{50}) around the target with the hitting probability of 0.5

$$r_{50} = 1,1744 \sigma = 1,746 E.$$

Calculations are substantially simplified for determining the probability to hit some region, using the circular distribution with radial MSD instead of the dispersion ellipse with axes σ_L and σ_B

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_L + \sigma_B).$$

Substitution is admissible when the ratio between the major axis and the minor axis does not exceed 1.5–1.6.

3.3. Methodology for the Evaluation of Injection Accuracy

The initial data to calculate the SC injection accuracy (errors of orbital parameters) are as follows:

- the state vector (\bar{V}, \bar{R}) determined during the calculation of the performance trajectory at the moment of SC separation;
- the correlation matrix of deviations of the LV state vector $|K|$ at the moment of SC separation moment;
- a totality of vectors of limit deviations of kinematic parameters $|C|_j$ due to j -th disturbing factor.

The LV accuracy characteristics are evaluated in the first turn based on the results of on-ground (laboratory, workshop, test bench, etc.) testing of CS instruments – a priori evaluation.

Finally, taking into consideration the impossibility of complete flight simulation, the results of a priori evaluation are complemented with the flight test data (field launches) – a posteriori evaluations.

On the basis of orbital measurement data collected during SC launches, a verification (redetermination) is performed on the adequacy of the adopted mathematical model of LV disturbed motion for test conditions.

Flight tests (FT) are the final, most critical phase of rocket testing. The FT target is a conclusion on the degree of compliance of LV characteristics with specification requirements. When accomplishing these tasks, a number of difficulties arise, which are connected with the fact that the statistical data obtained from FT (due to performing a limited number of experiments and due to some changes in their conditions) are small in their scope and inhomogeneous in their composition. The above circumstances limit the capability of determining the probability characteristics of tested objects by classical methods and require the development of combined methods, which take into account the data collected in the process of previous tests and of theoretical analysis (the so-called experimental-theoretical characteristics).

3.3.1. Correlation Matrix

The technique used includes the following stages:

- A. Calculate nominal values of kinematic parameters of LV motion;
- B. Calculate disturbed (due to each disturbing factor) values of kinematic parameters of LV motion;
- C. Calculate deviations of kinematic parameters of LV motion (elements of target orbit, deviation of SP impact points).

Calculation of deviation in LV kinematic parameters is made by parallel integration of the equations of nominal and disturbed (due to each disturbing factor) motion up to a specified time moment (SP separation) and by finding the difference:

$$\Delta Q_{ij} = Q_{ij}^B - Q_i^H,$$

where ΔQ_{ij} – deviation of the i -th parameter due to the j -th factor; Q_{ij}^B – disturbed (due to the j -th factor) value of the i -th parameter; Q_i^H – nominal value of the i -th parameter.

The following system of equations is used to calculate the nominal values of kinematic parameters of motion:

$$\begin{cases} \left| \dot{\vec{V}} \right| = \left| \dot{\vec{W}} \right| + \left| \bar{g}(\bar{R}) \right|; \\ \left| \dot{\vec{R}} \right| = \left| \vec{V} \right|, \end{cases}$$

where $\left| \dot{\vec{V}} \right|$ – vector of the absolute acceleration; $\left| \dot{\vec{W}} \right|$ – vector of the phantom accel-

eration determined during the calculation of the nominal (performance) trajectory); $|\bar{g}(\bar{R})|$ – vector of the gravitational acceleration.

To calculate the disturbed values of kinematic parameters of motion, the system of equations is used:

$$\begin{aligned} \left| \dot{\bar{V}}^B \right| &= \left| \dot{\bar{W}} \right| + \left| \Delta \dot{\bar{W}}_j \right| + \left| \bar{g}(\bar{R}^B) \right|; \\ \left| \dot{\bar{R}}^B \right| &= \left| \dot{\bar{V}}^B \right|, \end{aligned}$$

where $|\Delta \dot{\bar{W}}_j|$ – increment of the phantom acceleration due to the j -th disturbance.

The form and value of $|\Delta \dot{\bar{W}}_j|$ are determined by the characteristics of the rocket and the control system.

The result of calculations is a totality of vectors of limit deviations pertaining to kinematic parameters with respect to their nominal values.

$$|C|_j = \begin{vmatrix} \Delta_t X \\ \Delta_t Y \\ \Delta_t Z \\ \Delta_t Vx \\ \Delta_t Vy \\ \Delta_t Vz \end{vmatrix}_j = \begin{vmatrix} x_j^B - x \\ y_j^B - y \\ z_j^B - z \\ Vx_j^B - Vx \\ Vy_j^B - Vy \\ Vz_j^B - Vz \end{vmatrix}, j = 1, \dots, N,$$

where x, y, z, Vx, Vy, Vz – nominal values of kinematic parameters;

$x_j^B, y_j^B, z_j^B, Vx_j^B, Vy_j^B, Vz_j^B$ – values of kinematic parameters disturbed due the j -th factor; N – number of disturbing factors.

Based on the obtained set of vectors $|C|_j$, corresponding to the number of disturbing factors, a matrix of limit deviations of kinematic parameters is made and recorded in the following form:

$$|D| = \begin{vmatrix} \Delta_t x_1 & \dots & \Delta_t x_{N-1} & \Delta_t x_N \\ \Delta_t y_1 & \dots & \Delta_t y_{N-1} & \Delta_t y_N \\ \Delta_t z_1 & \dots & \Delta_t z_{N-1} & \Delta_t z_N \\ \Delta_t Vx_1 & \dots & \Delta_t Vx_{N-1} & \Delta_t Vx_N \\ \Delta_t Vy_1 & \dots & \Delta_t Vy_{N-1} & \Delta_t Vy_N \\ \Delta_t Vz_1 & \dots & \Delta_t Vz_{N-1} & \Delta_t Vz_N \end{vmatrix}.$$

The correlation matrix is determined in the following way

$$|K| = \left(\frac{1}{K_B} \right)^2 \cdot |D| \cdot |D|^T,$$

where K_B – quartile of normal distribution corresponding to the specified probability level of disturbing factors limit deviations (for example, for the confidence probability of 99.3%); index T means transposition.

The elements of the correlation matrix are the correlation moments that characterize the scattering of random values and links between them. The matrix obtained is symmetric in relation to the main diagonal. In this connection, it may be recorded in the form of right-hand (left-hand) triangular matrix

$$|K| = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{vmatrix}.$$

The following are other forms used to represent errors in the calculation of injection:

- the normalized correlation matrix of variations in kinematic parameters – $|r|$;
- root-mean-square deviations of projections of state vector for the moment of SC separation (σ_i)

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ij}K_{ij}}};$$

$$\sigma_i = \sqrt{K_{ij}}, i = j,$$

where r_{ij} , K_{ij} – elements of correlation matrices being at the crossing of the i -th line and the j -th column.

As deviations of the Q -th parameter (the controlled element of the orbit, error in the range or lateral direction) due to the j -th disturbing factor are independent and for them the principle of superposition is true, the total injection accuracy may be evaluated as

$$\Delta Q_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\Delta Q_j)^2},$$

where n – number of disturbing factors.

3.3.2. Statistical Modelling

The method of statistical modelling – the Monte-Carlo method – is used to evaluate the limit deviations of orbital elements whose distribution law differs from normal.

The scatter of orbital parameters ΔQ_i for the moment of SC separation is determined by the respective conversion of covariance matrix $|K|$ into deviations of kinematic parameters $\Delta \bar{V}_B, \Delta \bar{R}_B$ with the subsequent calculation of the state vector \bar{V}_B, \bar{R}_B and orbital parameters Q_i :

$$\bar{V}_B = \bar{V}_H + \Delta \bar{V}_B,$$

$$\bar{R}_B = \bar{R}_H + \Delta \bar{R}_B,$$

where \bar{V}_H, \bar{R}_H – state vector determined at the calculation of the nominal trajectory.

Having the matrix $|K|$ of correlation moments of the variation in kinematic parameters, the trajectories of deviation in coordinates and velocity vector components from their nominal values at the i -th realization of the injection trajectory are obtained as described below.

By the formula of the linear conversion, the random vector $|\Delta q|$, whose components are correlated among themselves, is replaced with the other random vector $|\Delta p|$, whose components are not correlated and are linear functions of components of the vector $|\Delta q|$:

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= \Delta p_1, \\ \Delta q_2 &= C_{21}\Delta p_1 + \Delta p_2, \\ \Delta q_3 &= C_{31}\Delta p_1 + C_{32}\Delta p_2 + \Delta p_3, \\ \Delta q_4 &= C_{41}\Delta p_1 + C_{42}\Delta p_2 + C_{43}\Delta p_3 + \Delta p_4, \\ \Delta q_5 &= C_{51}\Delta p_1 + C_{52}\Delta p_2 + C_{53}\Delta p_3 + C_{54}\Delta p_4 + \Delta p_5, \\ \Delta q_6 &= C_{61}\Delta p_1 + C_{62}\Delta p_2 + C_{63}\Delta p_3 + C_{64}\Delta p_4 + C_{65}\Delta p_5 + \Delta p_6,\end{aligned}$$

where $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_6$ – components of the random vector Δp ; c_{ij} – coefficients of the linear conversion determined so that the components of the random vector $|\Delta p|$ are not correlated among themselves.

The coefficients determined by the formulas

$$\begin{aligned}C_{i1} &= \frac{K_{i1}}{D_{p1}}; \\ C_{ij} &= \frac{1}{D_{pi}} \cdot \left(K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} C_{ik} \cdot C_{jk} \cdot D_{pk} \right), \quad i = 1, \dots, 6, j = 2, \dots, 6.\end{aligned}$$

satisfy such condition.

The dispersions of random values Δp_i are determined by the formulas

$$\begin{aligned}D_{p1} &= K_{11}; \\ D_{pi} &= K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |C_{ik}|^2 \cdot D_{pk}, \quad i = 2, \dots, 6.\end{aligned}$$

As components of the random vector $|\Delta p|$ are not correlated, its i -th realization is obtained as

$$\Delta p_i = K_j \cdot \Delta p, \quad j = 2, \dots, 6,$$

where K_1, \dots, K_6 – random non-correlated number in the i -th realization, distributed according to the normal law with $\sigma_{kj} = 1$.

The random vector $|\Delta q|_i$ in the i -th realization is determined by the linear conversion of the vector $|\Delta p|_i$:

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} C_{11} & & & & & 0 \\ C_{21} & C_{22} & & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & & \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot |\Delta p|_i.$$

The deviations of the initial orbit elements corresponding to the i -th realization of the vector $|\Delta q|_i$, are determined by the formula:

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_p,$$

where Q_i – osculating elements of the initial orbit at the i -th realization; Q_p – osculating elements of the targeted initial orbit.

Based on statistical calculations, the mathematical expectations m_Q , dispersions D_Q and mean-square deviations σ_Q are determined for each orbital element by the formulas:

$$m_Q = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta Q_i}{N};$$

$$D_Q = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta Q_i^2}{N-1} - \frac{N}{N-1} \cdot m_Q^2;$$

$$\sigma_Q = \sqrt{D_Q}.$$

The limit deviations of orbital elements, which are distributed according to the normal law are determined as

$$\Delta_Q = K_B \sigma_Q.$$

The limit deviations of orbital elements whose distribution law differs from normal are determined in as described next.

For the specified level of confidence probability (for example, $P = 0.997$), out of N realized deviations ($N = 4000$) of the corresponding orbital parameter $\frac{1}{2}(1-P) \cdot N$, positive biggest deviations and $\frac{1}{2}(1-P) \cdot N$ biggest (in modulus) negative deviations are selected.

The lowest (in modulus) of the selected deviations is taken accordingly as positive ($+\Delta Q_{\text{пред}}$) and negative ($-\Delta Q_{\text{пред}}$) limit deviations, which correspond to the level of the confidence probability of 99.7%.

Chapter 4

DISTURBING FACTORS

4.1. General Remarks

All disturbing factors that affect the LV injection accuracy may be conventionally divided into several groups. The first group covers the disturbing factors acting in the powered trajectory leg; the second group – the disturbing factors acting in the non-powered trajectory leg; and finally, the third group – errors in the preparation of geodetic and gravimetric launch data.

In the powered trajectory leg, where the rocket motion is controllable, the deviations of actual motion parameters from design values are caused mainly by the control system errors.

As any other automatic device, a CS has certain instrumental, methodical and dynamic errors.

The failure to consider all factors that affect LV flight dynamics in the control algorithms (data processing, generation of commands to cut off the engine) causes the so-called **methodical** error. This error arises because instruments of the guidance system control phantom parameters, which are not directly connected with specified parameters (parameters of the ellipse, flight range of the separable part, etc.). To decrease the methodical error, the control algorithm, and hence, the CS must become more sophisticated.

The control of the motion of the LV's centre-of-mass is reduced to the control of three velocity components (longitudinal, normal, and lateral) so that motion parameters of the LV's centre-of-mass ensure free flight in a required trajectory at the moment of SC separation. In other words, the misalignments of boundary conditions (**dynamic** error of control) should be sufficiently low.

In inertial navigation systems, the **instrumental** errors of sensitive elements (Fig. 4.1) lead to errors in determining the objects velocity and coordinates that vary in time. A detailed analysis of relations between those errors (the so-called mathematical model of errors) can be made only for a specific rocket and control system.

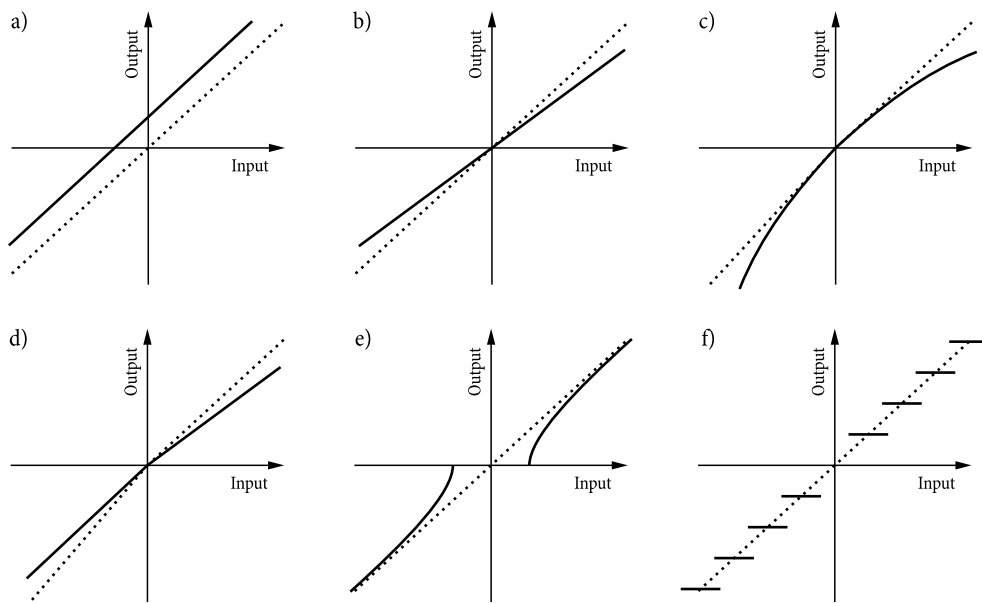


Fig. 4.1. a) Shift of zero; b) – Scale coefficient; c) Non-linearity; d) Asymmetry;
e) Insensitivity zone; f) Discretization zone

Such errors as zero shifts and inaccuracies of scale coefficients of accelerometers or drift velocities if gyro units are common for all inertial systems.

The drift velocities are caused by disturbing moments:

- not dependent on accelerations. A constant moment is usually created due to elastic deformations of flexible current collectors or electric reactions;
- dependent on accelerations. These moments arise because of unbalance of mass in two axes – the sensitivity axis and the kinetic moment axis.

To the disturbing factors acting in non-powered flight leg belong:

- disturbances of the separation leg;
- disturbances of the atmospheric flight leg.

The separation leg includes the rocket motion leg since the moment the command is given by the control system to cut off the engine up to the moment SC travels a sufficient distance away from the body of the rocket.

The separation can be executed:

- by the deceleration of a separable stage body using special decelerating devices (cut-off engines, braking nozzles);
- by pushing away using spring pushers.

During the selection of a specific design of the separation scheme, the problem is solved to ensure the safety of the separation process safety (without collisions) with minimization of scatter of the relative linear and angular separation rates.

The atmospheric trajectory leg begins from the conventional boundary of the atmosphere whose altitude depends on the task to be accomplished, SP characteristics, flight range, etc. So, for example, the beginning of a noticeable atmospheric effect on SP motion corresponds to the altitudes of about 80–100 km.

If we assume that an SP enters the atmosphere at some conventional altitude H_{BX} , and take the initial range of the atmospheric flight leg corresponding to this altitude to be equal to zero, we will obtain the domain of initial conditions V_{in}, θ_{in} at the altitude H_{in} .

The following requirements are imposed on the domain of initial conditions of the centre-of-mass motion of an object at entry into the atmosphere. The domain of initial conditions ensures normal operation of all systems of a separable object under specified launch conditions at maximal and minimal ranges in the trajectory of the optimal scattering and minimal time of reaching the specified point, etc.

The values of disturbing factors and their corresponding components of error are determined primarily based on tasks to be accomplished by a rocket, achieved level of hardware development, and Launch Services Customer requirements for the rocket.

4.2. Control Errors

The main disturbing factors that determine the injection accuracy due to control system errors are as follow:

- instrumental errors of sensitive elements of the control system;
- methodical and dynamic control errors.

The typical composition of inertial control system errors is given in Table 4.1, and may be refined when applied to a specific control system.

Table 4.1. Inertial CS Errors

List of Errors	Designation	Dimension
<i>Errors of accelerometers</i>		
Zero shift (measurement error, which is independent of acceleration)	n_t	referred to g_0
Inaccuracy of the scale factor	n_m	referred to \dot{W}
Errors in the orientation of a sensitivity axis in two mutually perpendicular planes	$\Delta\alpha_z, \Delta\alpha_y$	arc. sec
<i>Errors of gyro units</i>		
Drift rate not dependent on g-load	P_p, B_p, T_t	arcmin/min
Drift rate due to unbalance in a sensitivity axis under a single g-load action	P_{gr}, B_{gr}, T_{gr}	arcmin/min

End of Table 4.1

List of Errors	Designation	Dimension
Drift rate due to unbalance in a kinetic moment action under a single g-load action	P_{gk}, B_{gk}, T_{gk}	arcmin/min
<i>Errors of initial orientation</i>		
Errors in determining adjustment angles of measurement axes of an accelerometer prior to the launch with respect to the horizon plane	ψ_0, ϑ_0	arcsec
Errors in determining adjustment angles of measurement axes of an accelerometer prior to the launch with respect to the meridian plane (aiming)	φ_0	arcsec
<i>Other disturbances</i>		
Relative instability of power source frequency	n_f	dimensionless
Misalignments of boundary conditions (dynamic errors):		
in velocity	$\Delta V_{X_0}^y, \Delta V_{Y_0}^y, \Delta V_{Z_0}^y$	m/s
in coordinates	$\Delta X_0^y, \Delta Y_0^y, \Delta Z_0^y$	m
Stabilization errors	$\Delta \vartheta_{sep}, \Delta \psi_{sep}$	deg

4.3. Separation Errors

At engine cut-off, thrust does not disappear instantly, and the so-called aftereffect is observed. After the command to cut off the engine, due to afterburning of some propellant amount, a certain thrust $P(t)$ continues to be created, whose impulse, which is called the residual impulse is expressed by the formula:

$$I_{\text{нп}} = \int_{t_k}^{t_{n=0}} P(t) dt,$$

where t_k – time of command generation to cut off the engine; $t_n = 0$ – time moment corresponding to zero thrust.

The average value of the residual impulse is taken into account in calculating a flight task. The instability of the impulse (ΔI_n) with respect to its average value leads to the deviation in motion parameters of separable parts (or LV as a whole).

The scatter of the separation impulse (ΔV_{sep}), imparted to an object in the required direction (of orientation) by the separation system also leads to the deviation in motion parameters of separable parts.

4.4. Disturbances of the Atmospheric Flight Leg

During the motion of separable parts in the non-powered trajectory leg, the main disturbing factors that cause deviations of impact points from the design impact points act in the atmospheric leg.

These primarily include the following:

- scatters of atmospheric parameters (density, temperature);
- wind;
- deviations in SP mass-inertia characteristics;
- deviations in SP aerodynamic characteristics;
- scatters of initial conditions of SP angular motion at atmospheric entry.

We will group the deviations in SP characteristics from nominal by their effect on deviations in impact points as follows:

- deviations of weight G , middle section area S_m and the aerodynamic drag coefficient C_x from design values (scatter of the so-called ballistic coefficient $\sigma_x = C_x S_m / G$);
- lateral shift of SP centre-of-mass with respect to the geometrical symmetry axis.

4.5. Disturbed Motion of an SC

Section 1.2 considered the undisturbed (non-Keplerian) SC motion, i.e. the motion under ideal conditions, only in the field of the central gravitational force.

In reality, the SC motion is also affected by other forces, which are different from the central gravitational force. Those forces are caused by the following:

- the difference between the real gravitational field of the Earth from the central one;
- the existence of the Earth's atmosphere;
- the gravity of the Moon, Sun, and planets of the solar system;
- the solar radiation pressure and some other causes.

These forces are called disturbing and cause a deviation in the real motion of an SC from Keplerian. As a rule, these forces are small as compared with to the central gravitational force and this allows assuming that the disturbed motion differs from the undisturbed motion in quantitative respect only, while the basic motion laws remain true.

It is obvious that every time a ballistic task is solved, it is necessary to evaluate the deviations from the Keplerian motion.

Based on the analysis of the impact of each disturbing factor on SC motion and on a specific task, an applicable diagram of forces is selected as well as the corresponding physical abstraction of real bodies creating the disturbing forces, which

together are referred to as design conditions. The design conditions pre-determine a mathematical model of disturbed motion, and hence, the design trajectory shape. To select the design conditions, it is required to analyse the impact of various disturbing forces depending on orbital parameters and to reveal the basic motion laws.

This task is solved using the methods of study for the disturbed motion of an SC.

4.5.1. Disturbing Effects

The motion of an uncontrolled spacecraft under the action of the central gravitational force only takes place in a limited domain and is subject to Keplerian laws on the condition that the equation holds at each trajectory point

$$V^2 < \frac{2\mu}{r},$$

where V – absolute velocity of spacecraft motion; r distance from the SC to the attracting mass centre; μ – product of the gravitational constant and the mass of the attracting body.

In reality, besides the central gravitational force, the SC trajectory is affected by the disturbing effects, which cause the difference from the Keplerian motion. The disturbing forces are not equal in their values, and the main ones may be distinguished among them. The main disturbing forces are:

- the eccentricity of the gravitational field;
- the environmental impact;
- the solar radiation pressure;
- magnetic fields;
- the relativistic effect.

Impact of the Gravitational Field Eccentricity

The eccentricity of a gravitational field, in which an SC or other space object moves, is caused by the effect of gravitational fields of other celestial bodies and by the eccentricity of the Earth's own field. The eccentricity action of the gravitational field of the Earth is analysed in detail below. Here, we will consider the disturbances caused by effects of the Moon and the Sun, as it is expedient to consider only them among the effects of all celestial bodies.

The accelerations that correspond to the action of these forces (in the inertial geocentric coordinate system) are determined by the following equations:

$$\ddot{x} = fm_S \left(\frac{x_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{x_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{x_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{x_{TL}}{r_{TL}^3} \right);$$

$$\ddot{y} = fm_S \left(\frac{y_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{y_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{y_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{y_{TL}}{r_{TL}^3} \right);$$

$$\ddot{z} = fm_S \left(\frac{z_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{z_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{z_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{z_{TL}}{r_{TL}^3} \right),$$

where m_S – relative (with respect to the Earth) mass of the Sun; m_L – relative mass of the Moon; K – SC; S – the Sun; L the Moon; T – the Earth.

These disturbances lead to the rotation (the so-called precession) of the plane of the SC motion with angular rates $\dot{\Omega}_S$ and $\dot{\Omega}_L$ and to the change in the modulus of the focal radius of the SC orbit (δr_S and δr_L).

For the functions δr and $\delta \Omega$, the following evaluations may be given (Евтушенко, Крылов *et al.* 1967). For a circular orbit at 800 km distance from the Earth (in one revolution):

$$\delta r_{S\max} = 25.6 \text{ cm};$$

$$\delta r_{L\max} = 57.5 \text{ cm}.$$

The total deviation due to effects of the Sun and the Moon in one revolution

$$\delta r_{L,S} < 83 \text{ cm}.$$

Under same conditions, the SC at the distance of the one-day orbit (6.61 the Earth's radius) experiences the disturbances:

$$\delta r_{S\max} = 783 \text{ m};$$

$$\delta r_{L\max} = 313 \text{ m};$$

$$\delta r_{L,S} < 1096 \text{ m}.$$

The velocity of the ascending node displacement with respect to the ecliptic pole is equal to

$$\dot{\Omega}_L = 0,63 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_S = 0,28 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1},$$

and with respect to the celestial pole

$$\dot{\Omega}_{L,S} = 0,835 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1}.$$

For the SC being in the one-day orbit, the orbital plane precession with respect to the celestial pole is equal to:

$$\dot{\Omega}_L = 4,05 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_S = 10,2 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_{L,S} < 14 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1}.$$

For comparison, we may indicate that the orbital plane precession caused by the first degree of the polar compression of the Earth is only twice as high in this case

$$\dot{\Omega}_T < 30 \cdot 10^{-10} \text{ c}^{-1}.$$

The orbital plane precession with respect to the ecliptic pole depends on the value of the major semi-axis of the orbit in the following way:

$$\dot{\Omega}_T \sim a^{\frac{7}{2}};$$

$$\dot{\Omega}_L \sim a^{\frac{3}{2}}.$$

Thus, $\dot{\Omega}_T = \dot{\Omega}_L$ at the distance, which is equal to the value somewhat higher than seven radiuses of the Earth.

In some cases, the disturbing effect of the Moon (or any celestial body in general) can considerably change the picture of the SC motion. In this respect, the interesting results were obtained by M. L. Lidov (1961), the most important of which is the fact that the satellite lifetime decreases at certain inclinations of the motion plane of an SC to the motion plane of the disturbing body. At the above distance (about seven radiuses of the Earth), this effect cannot be neglected in calculations. So, for example, due to the disturbing impact of the Moon, the lifetime of Explorer VI satellite (orbital parameters: $a_0 = 43446$ km; $e_0 = 0.7604$; $i_0 = 47^\circ.10$) reduced more than ten times. The actual determination of the evolution of the orbit of the satellite Vanguard 1 (parameters: the apogee altitude above the Earth $h_a = 3948$ km; the period altitude $h_p = 658$ km; $i_0 = 34^\circ.3$; $e_0 = 0.19$; the Keplerian orbital period $T_k = 134^m.18$; the weight $G = 2$ kg) due to the disturbing effect of the Sun showed the following values: $\dot{\Omega}_S = 0^\circ.18$ per year, $\delta r_S = 56.6$ cm. The impact of the Moon on the evolution of the orbit was 2.2 times bigger.

Thus, when neglecting the disturbing effect of the Moon and the Sun while considering the SC motion, for example, during one day at an average distance from the Earth (up to 3–4 thou. km from the Earth's surface), the error in determining the SC position will amount to several hundred metres.

For an SC with the apogee of about 40 000 km in the same time interval, the error will reach several tens kilometres (this error is caused mainly by the error in the position of the orbital plane; the error due to inaccuracy of determining the focal radius will be in the order of one kilometre only).

Atmospheric Impact

Unlike the conservative¹ impact of masses of the Moon and the Sun, the atmosphere produces a dissipative effect on the motion of an SC. The energy of a moving

¹ Conservative mechanical system is a mechanical system whose full energy remains constant. If potential energy of the system \mathbf{u} depends only on the coordinates (for examples: x, y, z), the forces in a conservative system are determined in the following form: $F_x = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$ (this condition is necessary and sufficient). Unlike the conservation system, in the dissipative system, the full mechanical energy continuously decreases (dissipates) converting into other energy types (mainly, thermal).

body and its attitude above the Earth decrease continuously and this body, entering the dense atmosphere, transfers into a steep descent trajectory. The braking effect of the atmosphere is characterized by the acceleration value experienced by the body that may be calculated by the known formula

$$\bar{A} = -B\rho V_{rel}^2 \bar{V}_{rel}^{\circ}.$$

where V_{rel} – SC motion velocity with respect to the environment; \bar{V}_{rel}° – unit vector of the relative velocity; ρ – mass density of the environment; $B = C_x S/2m$ – SC ballistic coefficient; C_x – aerodynamic drag coefficient depending on the shape of the body and flowing conditions; S – characteristics area (for example, wide section area), to which the coefficient C_x referred; m – mass of the body.

The aerodynamic drag coefficient of an SC depends on several factors (geometrical shape of the object, its orientation with respect to the relative velocity vector, environmental temperature, conditions concerning the interaction of molecules and atoms of the upper atmosphere with the surface of the object, etc.).

The ballistic coefficient is a comprehensive aerodynamic characteristic of space objects moving in the upper atmosphere.

In the range of altitudes of up to 300 km above the Earth's surface, the atmosphere is an essential factor affecting the SC motion. In many cases (especially when the motion is studied in a comparatively long time interval), this effect is taken into consideration. Naturally, all the issues connected with the duration of the SC lifetime are caused ultimately by the atmospheric impact. However, in general, the necessity to consider the atmospheric impact depends on the specific formulation and initial conditions of each analysed task.

Impact of Magnetic Fields. The Relativistic Effect

The SC electric systems and a magnetic field caused by them make the satellite motion sensitive to the Earth's magnetic field and to its local random changes. As the phenomena connected with the theory of relativity become noticeable at the velocity of object's motion close to the velocity of light, we may suppose in advance that the relativistic effect will only have an insignificant impact on the SC motion within a comparatively short time interval. For the generality of the analysis; however, we will consider this phenomenon in more detail. When determining the SC motion, the relativistic effect is connected with the fact that the SC trajectory (record of motion equations, specification of initial conditions) is determined by currently known methods in the inertial Galilean space. In reality, according to the general theory of relativity, any coordinate system, which is inertial in the framework of Newtonian mechanics, disturbs under the presence of gravitational fields, i.e. it will no longer be a Galilean system. In other words, the geometrical space is distorted due to the existence of gravitating bodies.

Gravitational fields of the Earth and the Sun cause continuous rotation of the line of apsides of the SC orbit in the direction of the SC motion. This effect is proportional to the ratio V^2 / C^2 (V – SC motion velocity in a gravitational field, C – velocity of light in vacuum), in this case, the gravitational effect of the Sun, besides the motion of the line of apsides also causes the shift of the node line.

The shift of the perigee of the orbit of a celestial body (in arcseconds per century) due to the gravitational effect of the Earth may be determined from the formula:

$$\Delta\omega_1 = 1,74 \cdot \frac{10^{25}}{\frac{3}{a^2}} (1 - e^2),$$

where a – is measured in centimetres.

The shift in the perigee due to the gravitational effect of the Sun ($\Delta\omega_2$) for close space objects is equal in average to $1''.9$ per century. The shift of the node line (in arcseconds per century) due to the Sun may be determined from the formula:

$$\Delta\Omega = 1,67 \cdot \frac{10^{33}}{\frac{5}{a^2}} (1 - e^2),$$

Table 4.2 (Евтушенко, Крылов *et al.* 1967) below shows the shift of the line of apsides of SC orbits (in arcseconds per year) depending on their distance to the centre of the Earth (under the effect of the Earth's gravitational field only).

The second relativistic effect in the motion of artificial satellites is the shift of the line of apsides caused by the rotation of the gravitating bodies (the Earth and the Sun).

Table 4.2

Average distance to the Earth's centre, cm	Orbit eccentricity, e_0	Shift of the line of apsides, $\Delta\omega_1$
$r = r_{Earth} = 66367 \times 10^8$	0	$17''$
$r = r_{Earth} + 4 \times 10^7 = 8.77 \times 10^8$	0.01	$14''.5$
$r = 10 \times 10^8$	0.25	$5''.866$

The impact of the rotation of the Earth and the Sun may be by one or two orders less than the relativistic effect that takes place if the rotation is absent. Both of these effects are combined algebraically, taking into account that the rotation of the Earth and the Sun decreases the total relativistic effect.

The equations of the motion of an artificial satellite (SC) of the Earth may be obtained in the framework of relativistic mechanics. However, due to their complexity and the relatively small difference in the motion described by them as compared with the motion in Galilean space, their use at present is not justified.

The impacts of a magnetic field and relativistic effect are extremely low and may be neglected in the majority of tasks related to the motion of artificial satellites of the Earth.

Impact of Solar Radiation

The phenomenon of solar radiation, i.e. the solar radiation pressure, produces a considerable disturbing effect on the motion of space objects; in those space objects, the ratio of cross section area S to the weight G is sufficiently high, namely:

$$S/G > 25 \text{ cm}^2/\text{g}.$$

A sufficiently accurate calculation of this impact is complicated by the fact that a space object moves in the Earth's shadow during the majority of time. It is all the more difficult to make this calculation for the SC that moves in elliptical orbits.

The disturbing force caused by the impact of solar radiation in the case when SC is illuminated by the Sun or completely shadowed by the Earth (if we neglect the parallax equal to 11' at the distance of 1600 km from the Earth) is equal to:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{r}_S^\circ,$$

where \vec{r}_S° – unit vector of direction to the Sun; $F = \gamma \cdot \nu \cdot \rho \cdot S$; S – effective lateral SC section with respect to the direction \vec{r}_S° ; ρ – pressure of solar radiation near the Earth (this value is equal approx. to $(4.5 \times 10) \times 10^{-5} \text{ dyne/cm}^2$); γ – coefficient depending on reflecting properties of the SC surface; ν – coefficient, which is equal to one if the SC is illuminated by the Sun and is equal to zero if the SC is in Earth's shadow.

The pressure of solar rays on SC moving in a circular orbit causes the shift of the geometrical centre of the orbit. As a result, the distance between the SC and the Earth decreases in the part of the trajectory where the SC moves away from the Sun. Due to resonance effects, the altitude of the orbit's perigee decreases and the SC lifetime (up to the moment of re-entry in to the dense atmosphere) may reduce by tens of times. For Echo-1 SC, in particular, this resonance inclination is equal to 35°.

Thus, the phenomenon of solar radiation should be taken into consideration if the motion during a long time interval is studied for a SC with the ratio $S/G > 25 \text{ cm}^2/\text{g}$.

A considerably greater disturbing effect, as compared with the above, is produced by the eccentricity of the gravitational field of the Earth.

4.5.2. Figure of the Earth

The Earth's surface with its lowlands, highlands and geological features has a complex geometrical shape. It is considered that the Earth assumes a shape of a body limited by the oceans' surface at a complete equilibrium of water masses in the oceans (at calm) continued under the continents at the level of the World Ocean

(Fig. 4.2). This body is called the geoid. In a geometrical sense, the figure of a geoid is irregular and rather complicated, which makes the solution of mathematical problems on its surface very difficult. Therefore, we have to replace the actual figure of the Earth with a body, which is sufficiently close to a geoid, but is simpler in the geometrical respect. A sphere with the radius $R_e = 6371.210$ km may serve as a first approximation to the geoid. The theoretical and experimental investigations showed that as a figure, which is closer in its shape to a geoid, the ellipsoid of rotation with a low compression may be used.

One of the tasks of higher geodesy is determining the parameters of such an ellipsoid of rotation, for which the following conditions are satisfied:

- the centre of the ellipsoid coincides with the centre-of-mass of the Earth;
- the equator plane of the ellipsoid coincides with equator plane of the Earth (Fig. 4.3);
- the volume of the ellipsoid is equal to the volume of the geoid;
- the sum of squares of surface deviations of the ellipsoid from the surface of the geoid is minimal.

Such ellipsoid is called the general ellipsoid of the Earth (GEE).

Further, under the dimensions of the ellipsoid we mean the equatorial or major semi-axis and the polar compression. Different countries use different ellipsoids referred to as reference-ellipsoids, which are different from the GEE. This difference lies in the non-coincidence of dimensions and centres, and the condition of minimum of the sum of squares of deviations in the height is not fulfilled for the whole surface of the Earth, but only for the part on which the geodetic works have been performed, whose results are used to derive its parameters.

In countries of the former USSR, the Krasovsky reference-ellipsoid (KE) is used. It has the dimensions:

- the major semi-axis $a = 6378.245$ km;
- the minor semi-axis $b = 6356.863$ km;
- the polar compression $\alpha = 0.00335233$.

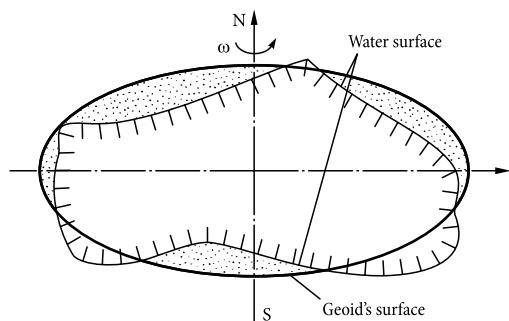


Fig. 4.2

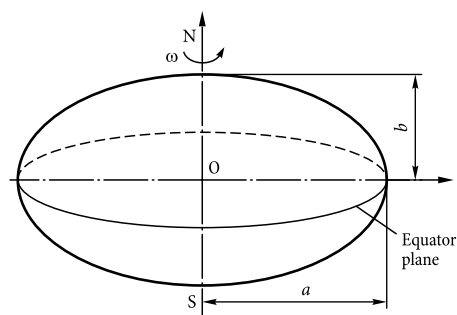


Fig. 4.3

A more perfect model of the figure of the Earth is the three-axis Krasovsky ellipsoid, whose dimensions are as follow (Fig. 4.4):

- $a = 6379.351$ km;
- $b = 6356.863$ km;
- $c = 6378.139$ km;
- $\beta = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{3000}$.

Here β characterizes the equatorial compression of the ellipsoid. From the comparison of α and β it is seen that the polar compression is by two orders greater than the equatorial compression. The three-axis Krasovsky ellipsoid is selected based on the condition of the best approximation to the geoid. The clearance between them does not exceed 100 m.

4.5.3. Launch Point

The position of the launch point “0” on the Earth’s surface is determined (Fig. 4.5):

- by the geodetic latitude of the launch point on the KE – B_0 ;
- by the geodetic longitude of the launch point on the KE – L_0 ;
- by the geodetic altitude of the launch point on the KE – H_0 .

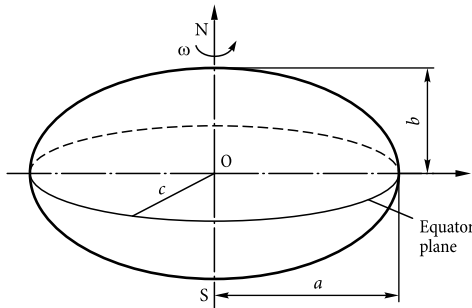


Fig. 4.4. Three-axis Krasovsky ellipsoid

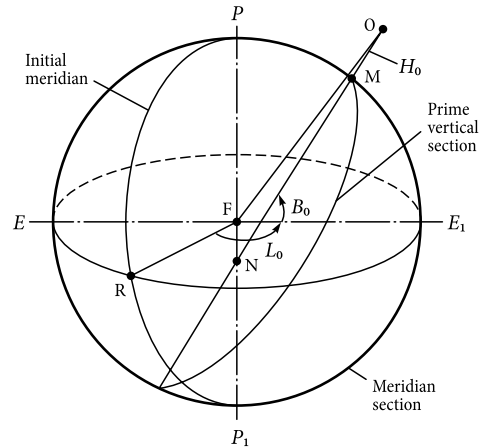


Fig. 4.5. Characteristics of the launch point

The geodetic latitude of the launch point “0” is called an acute angle B_0 formed by the normal MN to the ellipsoid’s surface at this point and the equator plane ERE_1 . We will refer to the geodetic longitude L_0 of the launch point as the dihedral angle RFE_1 formed by this point’s meridian plane and the plane of the initial meridian PRP_1 . A meridian going through the Greenwich observatory is taken as the initial meridian to calculate longitudes. We refer to the geodetic altitude H_0 as a segment of the normal OM to the reference ellipsoid from a given point of the Earth.

The main normal segments of the ellipsoid of rotation at some point M of the surface are:

- the meridian segment going through the given point M and both poles of the ellipsoid P and P_1 (north-south);
- the segment of the prime vertical going through the point M and perpendicular to the meridian segment.

Let us also introduce a notion of astronomical coordinates. The astronomical latitude will be the angle between the vertical at the given point and the equator plane. Accordingly, the astronomical longitude will be called a dihedral angle, formed between the plane of the initial meridian and the plane of the astronomical meridian going through the vertical at the given point.

The astronomical latitudes and longitudes determine the direction of the vertical, i.e. the direction of the real gravitational force.

The angle between the direction of vertical and the direction of the normal to the ellipsoid surface is generally referred to as a deviation. The deviation of the vertical of the given point is determined by two values: the projection of the full deviation at the meridian plane (a component of the deviation in the meridian ξ_M) and the prime vertical (a component of the deviation in the prime vertical η_M).

The astronomical coordinates (φ , λ) and the astronomical azimuth a (the direction between the points of the Earth's surface with respect to the direction of the North Pole of the Earth – with respect to the meridian plane of the given point) are connected with their geodetic values (B_0 , L_0 , A_0) by expressions

$$\begin{aligned} B_0 &= \varphi - \xi_M; \\ L_0 &= \lambda - \eta_M \times \operatorname{cosec} \varphi; \\ A_0 &= \alpha - \eta_M \times \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

4.5.3. Gravitational Potential

The study of the figure of the Earth is inseparably linked with the investigation of its gravitational field, which is characterized by the gravitational potential.

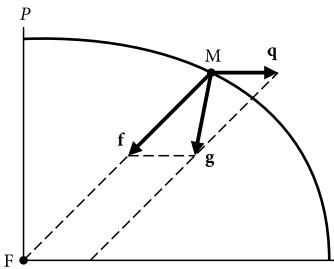


Fig. 4.6. Gravitational force

Two forces act on some material point M on the Earth's surface (Fig. 4.6): the gravitational force of the Earth f and the centrifugal force q , directed perpendicularly to the rotation axis FP arising due to the rotation of the Earth around its axis.

The gravitational force f is determined by the distribution of the mass of the Earth and its shape.

The centrifugal force q is proportional to the distance ρ from the rotation axis to the squared angular velocity ω_3 of the Earth's rotation

$$q = \rho \times \omega_3^2.$$

The resultant of these two forces is called the **gravitational force**. The latter is expressed by the vector sum

$$\bar{\mathbf{g}} = \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{q}}.$$

The gravitational force is characterized by the acceleration, assumed by a free-falling body. The unit of acceleration is the Gal, which is determined by the relation

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2.$$

Let us separate from the total potential of the gravitational force “the correct part”, which has the name of the **normal potential**. In other words, the normal potential is called the gravitational force potential, which is as close as possible to the real potential by its value and is simply calculated. As the normal potential, the potential of the ellipsoid of rotation is taken having the mass equal to the mass of the Earth and rotating with the same angular velocity as the real Earth. The difference of real and normal potentials will be called the **disturbing potential**; its calculation requires the knowledge of the density at each point of the Earth, which is rather difficult.

Deviations of the actual potential of the Earth from the normal, which are otherwise referred to as **gravitational force anomalies**, are taken into account by special distribution of the mass inside the Earth. As a rule, values of anomalies are given in special catalogues and are classified.

The actual gravitational force g differs from the normal by its value and direction. The difference in the values of the actual and normal force is the **gravitational force anomaly**, and the difference in directions is characterized by the **deviation of the vertical**.

As a rule, the **gravitational force anomalies** amount to several tens of milligals reaching several hundreds of milligals in separate regions. The maximal **deviations of the vertical on the Earth's surface** are $\sim 1 \text{ arc min}$. (Юзефович, Огородова 1980).

When studying the SC motion at an especially big distance from planets, the real attracting masses may be replaced by material points. This is allowable as the dimensions of attracting bodies as compared with the distance to a remote SC are negligibly small. In the cases when the SC flight for a long time proceeds near an attracting body or when some flight stages are performed in close proximity of the attracting centre (SC orbital injection or descent), the distance from the attracting bodies to the SC is of the same order as the size of the attracting bodies themselves. In that case, at accurate solution of the task of the SC flight, the attracting bodies cannot be considered as material points, and it is required to take into account the force action on the SC caused by the figure and mass distribution of the attracting centre.

The Earth, like any other planet, creates a field of attraction around itself (gravitational field), which causes the gravitational force G . In gravimetry, the field of attraction corresponding to the general ellipsoid of the Earth is considered normal, and the deviation of the actual force of the gravity of the Earth from the normal is called the field of anomalies of the Earth's gravity.

Each point of the gravitational field is characterized by the vector of gravity acceleration $\bar{\mathbf{j}}_{\text{gr}}$. According to Newton's second law, the expression to determine the gravitational force has the form of

$$\bar{\mathbf{G}} = m \cdot \bar{\mathbf{j}}_{\text{gr}},$$

where m – SC mass.

The property of the gravitational field to create the acceleration of a certain value and direction at each point of space is mathematically described by a potential function (the gravitational potential).

It is known from the theoretical mechanics that the gravitational force is a conservative force, and hence the projections of this force on the axes of rectangular CS (O_3XYZ), which is rigidly fixed to the centre-of-mass of the Earth, are equal to the partial derivatives of the gravitational potential along the following coordinates:

$$\begin{aligned} G_X &= \frac{\partial U}{\partial X}; \\ G_Y &= \frac{\partial U}{\partial Y}; \\ G_Z &= \frac{\partial U}{\partial Z}, \end{aligned}$$

where U – potential of gravitational forces of the Earth; G_X , G_Y , G_Z – projections of the vector to the coordinate axes.

By dividing G_X , G_Y , G_Z into the SC mass, we obtain the ratios to calculate the projections of the vector of gravity acceleration $\bar{\mathbf{j}}_{\text{gr}}$ on the coordinate axes X , Y , Z :

$$\begin{aligned} j_X &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial X}; \\ j_Y &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y}; \\ j_Z &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z}. \end{aligned}$$

Thus, the task of determining the gravitational force of the Earth or gravity acceleration will be solved if the expression for gravitational potential is known.

If we imagine the Earth in the form of a sphere with an even distribution of density or with the spherical symmetry, i.e. the density varying only along the radius, its field of attraction would be central and the gravitational potential for the external

point of mass m , at the distance r from the Earth's centre may be recorded in the following way:

$$U = -\frac{\mu m}{r},$$

where $\mu = f \times M_3 = 398\,605 \text{ km}^3/\text{s}^2$ – the constant of the gravitational field of the Earth.

The projection of the gravitational field of the Earth acting on a material point with the mass m , on the direction radius-vector connecting the Earth's centre with the material point is calculated by the formula:

$$G_{\text{centre}}(r) = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu m}{r^3}.$$

The minus sign shows that the gravitational force is directed to the side, which is opposite to the radius-vector r . Dividing both parts of this expression by m , we will obtain the projection of vector of the gravity acceleration \bar{j}_{gr} to the direction r :

$$j_{\text{gr}} = -\frac{\mu}{r^3}.$$

Hereafter, we will record the potential of gravitational forces for the external material point of single mass. In this case, the derivative of the potential of gravitational forces along any direction will be equal to the projection of gravity acceleration in this direction.

If we imagine the form of the Earth as an ellipsoid of rotation, and this is an axisymmetric body, the minor axis being the symmetry axis, in that case, the vector of gravity acceleration \bar{j}_{gr} lies in the meridian plane and is deviated from the radius r in the direction of the equator, excluding the cases when the material point is in the equatorial plane or in the line connecting the poles (Fig. 4.7).

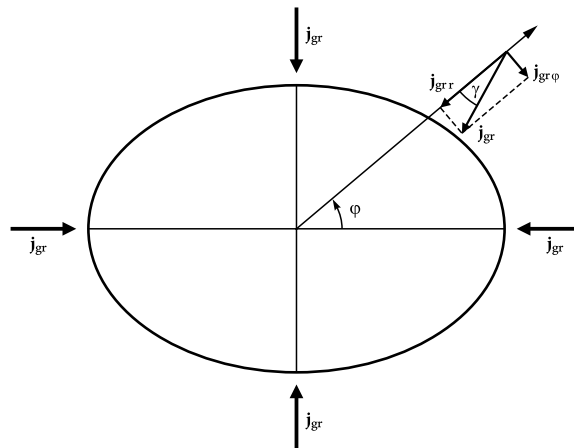


Fig. 4.7

The task of determining the gravity potential of the body, which is not a homogeneous sphere or does not have a spherical symmetry, is rather complicated. In general case, the potential of the gravitational field of the Earth for a point with single mass ($m = 1$) is presented in the form of an integral

$$U = f \cdot \int_0^{M_e} \frac{dm}{r}, \quad (4.1)$$

where $f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{cm}^3/\text{gf}^2$ – constant of the universal gravitation; dm – elementary mass of the Earth; M_e – total mass of the Earth; r – distance between the elementary mass of the Earth and the selected point of the field.

In connection with the fact that the Earth has a complicated form and is inhomogeneous by its density, the integral (4.1) can be calculated only approximately, by presenting it, for example, in the form of infinite series of functions. In case of using the spherical coordinates of the point of the field – r, φ, λ , such presentation will have the form

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\left(\frac{R_E}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \right),$$

where R_E – equatorial radius of the Earth equal to 6378.16 km; r, φ, λ – geocentric coordinates (radius, latitude, longitude) of the point at which the gravity force is measured; C_{nm}, d_{nm} – dimensionless expansion coefficients determined from the gravimetric data and based on the observation of the motion of artificial satellites of the Earth; P_{nm} – Legendre polynomial of degree n and order m .

The expansion terms $P_{nm}(\sin \varphi) \cdot \cos(m\lambda)$ and $P_{nm}(\sin \varphi) \cdot \sin(m\lambda)$ are called the harmonic elements:

- zonal, if $m = 0$, in that case only the latitude effects of the gravitational force of the Earth are taken into account;
- sectorial or longitude, if $m = n$, they describe the impact of longitude effects only;
- tesseral, if $m \neq n$, they reflect the combined effects from both the latitude and longitude of the SC location.

In calculations, it is convenient to determine these functions using the recurrent dependencies:

$$P_{nm} = \frac{(2n-1) \sin \varphi P_{n-1,m} - (n+m+1) P_{n-2,m}}{n-m}, \text{ if } m < n,$$

$$P_{nm} = (2n-1) P_{n-1,m-1} \cos \varphi, \text{ if } n = m.$$

The first three dependencies required for the beginning of the calculation by this formula have the form

$$P_{00} = 1, P_{10} = \sin \varphi, P_{11} = \cos \varphi.$$

For multiple trigonometric functions

$$\sin m\lambda = \sin \lambda \cos (m-1)\lambda + \cos \lambda \sin (m-1)\lambda;$$

$$\cos m\lambda = \cos \lambda \cos (m-1)\lambda - \sin \lambda \sin (m-1)\lambda.$$

The schemes of signs changing on the sphere given by these harmonics are shown in Fig. 4.8.

When solving the problems connected with the motion of launch vehicles and flights of SC of various purposes, the mathematical figure of the Earth is selected, which ensures the consideration of the Earth's gravity with the specified accuracy.

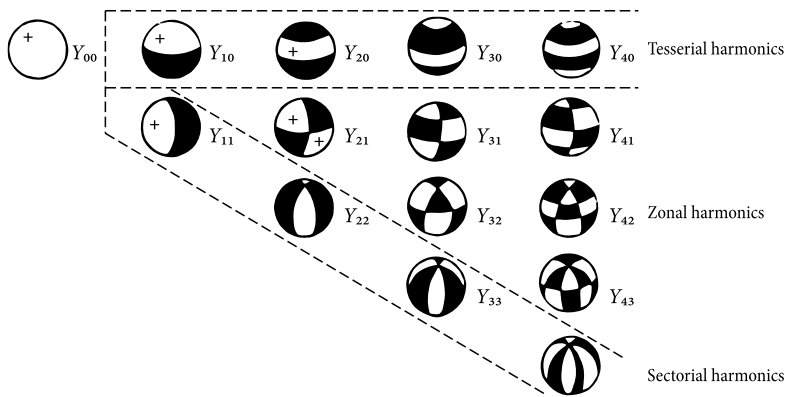


Fig. 4.8

Let us consider the dependencies of the Earth's gravity from the form of the Earth's surface. We will approximate the geoid (and hence, its gravitational field) as physically real bodies. Such approximate notions of the Earth and its gravitational field will be called the models.

Spherical Earth

The gravitational field potential

$$U = \frac{\mu}{r}.$$

This model characterizes the central gravitational field of the Earth. The motion of the centre-of-mass of an SC in such a field is described in the simplest way. The motion trajectories of a material point in the field of the central force are the second-order curves (circumference, ellipse, parabola, hyperbola); besides, the form of the trajectory depends on initial conditions (for an SC – on the values of motion parameters at the end of the injection leg). The SC motion in the central gravitational field is called the Keplerian motion.

Spheroidal Earth

The potential of a gravitational field for such a model has the form

$$U = \frac{\mu}{r} \left(1 + C_{20} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 P_{20}(\sin \varphi) \right),$$

where $C_{20} = -0.00109808$ – coefficient proportional to the polar compression of the Earth. Therefore, this expression is the potential of a gravitational field of an ellipsoid of rotation, whose squared compression may be neglected. Such ellipsoid, which does not differ much from the sphere, is called the spheroid. The Legendre polynomial is equal to

$$P_{20}(\sin \varphi) = \frac{1}{2} (3 \cdot \sin^2 \varphi - 1).$$

The maximal difference of a spheroid from a sphere is proportional to the compression $\alpha = 1/208.2$ and is equal to 21 km. In the problems where the SC motion is studied in the interval of several orbits, this model often ensures the required accuracy of the solution.

Three-Axial Unsymmetrical Ellipsoid

The gravitational potential

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[C_{20} P_{20}(\sin \varphi) + (C_{22} \cos 2\lambda + d_{22} \cdot 2 \sin \lambda) P_{22}(\sin \varphi) \right] + \right. \\ \left. \left(\frac{R_E}{r} \right)^3 C_{30} P_{30}(\sin \varphi) + \left(\frac{R_E}{r} \right)^4 C_{40} P_{40}(\sin \varphi) \right\}.$$

This is the most complete of the models under consideration, and it is the closest to a geoid as compared with the other models. Here, all main expansion terms of the gravitational potential are present.

It should be noted that when solving some problems connected with long flights of an SC and with the necessity of long-term prediction of SC motion, a more complete model of the gravitational field of the Earth is used, taking into account the expansion coefficients to the sixth zonal harmonic inclusively and sometimes even higher.

4.6. Errors in Preparation of Geodetic and Gravimetric Data

One of the factors that affect the injection accuracy of an SC is the errors of determining the initial astronomical, geodetic and gravimetric data used for the calculation of a flight task, guidance and checking of LV control system instruments.

The entire collection of those errors is usually divided into the following three groups:

- 1) errors of data determined at launch and processing sites,
- 2) errors made in determining the coordinates of guidance points.
- 3) errors of data that characterize the gravitational potential of the general ellipsoid of the Earth.

To the first group belong the errors of determining the following data:

- launch point coordinates (latitude B_0 , longitude L_0 , and altitude H_0 on the Krasovsky ellipsoid (the reference ellipsoid));
- the absolute value of the gravity acceleration g_0 at the launch point and at the processing site;
- constituents of the vertical deviation in the meridian plane and of the prime vertical ξ_n, η_n ;
- the azimuth of the basic direction A_b for the optical guidance.

In this case, by the launch point we mean the point of the rocket's longitudinal axis at the level of the instrument bay.

To the second group belong the errors made determining the coordinates of the guidance points (latitude B_g , longitude, L_g and altitude H_g on the Krasovsky ellipsoid).

In this case, by the guidance point we mean the point of the physical Earth's surface.

To the third group belong the anomalies of the gravitational field of the Earth Δg_i .

Chapter 5

A PRIORI EVALUATION OF THE INJECTION ACCURACY

5.1. Mathematical Model of the Disturbed Motion of an LV

5.1.1. Coordinate Systems

When describing the mathematical model of the disturbed motion of an LV, the following right-handed rectangular coordinate systems are used.

The **absolute geocentric** coordinate system $O_a, \xi_a, \eta_a, \varsigma_a$ (AGCS).

The origin of the coordinate system is located at the centre of the general ellipsoid of the Earth (Fig. 5.1). At the launch moment ($t = 0$), the axis $O_a\xi_a$ is directed along the vector of angular velocity of the Earth's rotation (Ω_3); the axis $O_a\eta_a$ is directed to the point of crossing between the zero (Greenwich) meridian and the equator. Further, the coordinate system retains the unchangeable position with respect to the inertial space.

The **initial launch** coordinate system $O_0X_0Y_0Z_0$ (ILCS).

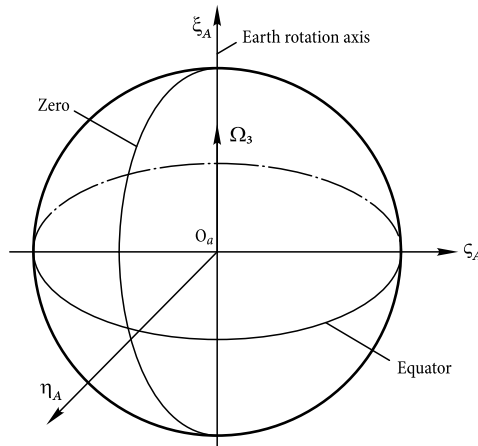


Fig. 5.1. Absolute Geocentric CS

The origin of the coordinate system is specified by the geodetic coordinates of the launch point with respect to the Krasovsky ellipsoid: the latitude B_0 , the longitude L_0 and the altitude H_0 . At the moment of the launch, the axis O_0X_0 forms the angle with the north direction, which is equal to the geodetic guidance azimuth; the axis O_0Y_0 is directed upwards along the normal to the Krasovsky ellipsoid. Further, the coordinate system retains the unchangeable position with respect to the inertial space.

The coordinate system of the **deviated initial launch** $O_nX_nY_nZ_n$ (IL DCS).

It differs from the initial launch CS by the fact that the axis O_nY_n is directed upwards along the vertical, and the axis O_nX_n forms the astronomical azimuth α with the north direction. The **instrument** coordinate system $O_iX_iY_iZ_i$ (ICS).

The origin of the coordinate system is located in the centre of the axial cross of the gimbal suspension of the gyro stabilizer. The axis O_iX_i is directed along the yaw axis; the axis O_iY_i is directed along the rotation axis; and the axis O_iZ_i is directed along the GSP pitch axis. At the moment of the launch, the plane $O_iX_iY_i$ may be turned with respect to the plane $O_nX_nY_n$ of the initial deviated coordinate system by the angle χ .

The **accelerometric** coordinate system $O_jX_jY_jZ_j$ (ACS) is connected with the j -th accelerometer. The origin of the coordinate system is located in the centre of cross of the measuring axis O_jX_j and the suspension axis O_jY_j of the accelerometer pendulum (Fig. 5.2). The planes $O_jX_jY_j$ and $O_jX_jZ_j$ are turned with respect to the planes $O_iX_iY_i$ and $O_nX_nZ_n$ of the instrument coordinate system by angles α_y and α_z .

The coordinate system **fixed to the gyro unit** $O_rX_rY_rZ_r$ (GUFCS).

The origin of the coordinate system is located in the centre of the cross of sensitivity axis O_rX_r and the suspension axis O_rZ_r (Fig. 5.3). Sensitivity axes of the yaw gyro units (YGU) and roll gyro units (RGU) are mutually perpendicular and turned with respect to the instrument coordinate system by the angle ϕ_p . The suspension axis of pitch gyro units is turned with respect to the axis O_nX_n of the instrument coordinate system by the angle ϕ_T .

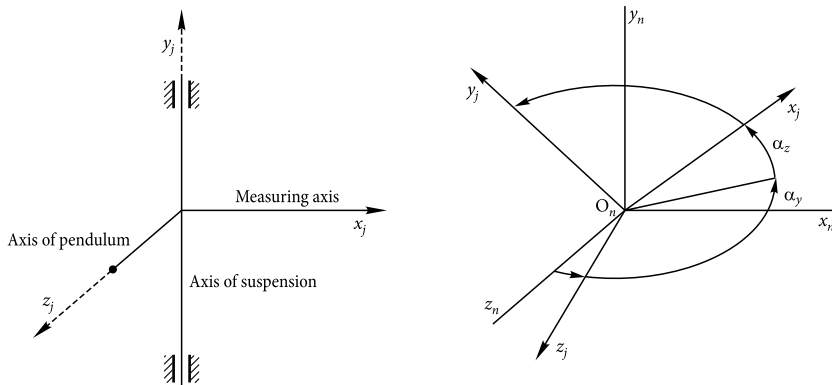


Fig. 5.2. Accelerometric CS

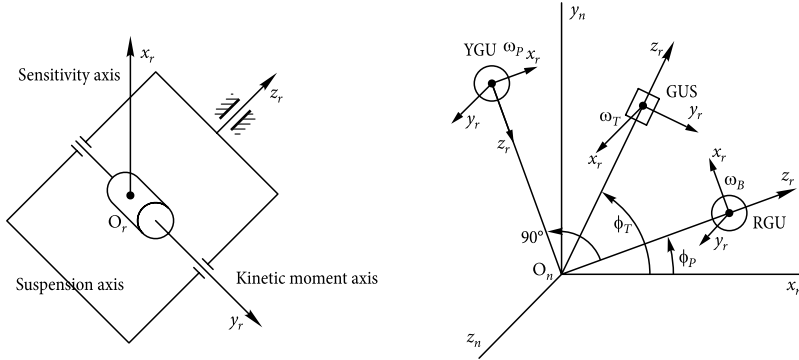


Fig. 5.3. Gyro unit-fixed CS

The coordinate system **fixed to the LV** $O_1X_1Y_1Z_1$ (FCS).

The origin of the coordinate system is located in centre-of-mass of the LV. The axis O_1X_1 is directed along the longitudinal axis of the LV. The axis O_1Y_1 lies in the stabilization plane I-III. The axes of the fixed coordinate system and the axes of initial launch coordinate system form the ballistic yaw ψ , pitch ϑ and roll φ angles.

5.1.2. Matrices of Direction Cosines

Matrix $|a|$ – a transition from the accelerometric system to the instrumental system.

	X_n	Y_n	Z_n
X_j	$\cos\alpha_y \cos\alpha_z$	$\sin\alpha_z$	$-\cos\alpha_z \sin\alpha_y$
Y_j	$-\cos\alpha_y \sin\alpha_z$	$\cos\alpha_z$	$\sin\alpha_z \sin\alpha_y$
Z_j	$\sin\alpha_y$	0	$\cos\alpha_y$

Matrix $|c|$ – a transition from the initial launch coordinate system to the absolute geocentric coordinate system.

	ξ_a	η_a	ζ_a
X_0	$\cos A_0 \cos B_0$	$-\cos A_0 \sin B_0 \cos L_0 - \sin A_0 \sin L_0$	$-\cos A_0 \sin B_0 \sin L_0 + \sin A_0 \cos L_0$
Y_0	$\sin B_0$	$\cos B_0 \cos L_0$	$\cos B_0 \sin L_0$
Z_0	$-\sin A_0 \cos B_0$	$\sin A_0 \sin B_0 \cos L_0 - \cos A_0 \sin L_0$	$\sin A_0 \sin B_0 \sin L_0 + \cos A_0 \cos L_0$

Matrix $|d|$ – a transition from fixed coordinate system to the initial launch CS.

	X_0	Y_0	Z_0
X_1	$\cos\vartheta \cos\psi$	$\sin\vartheta$	$-\cos\vartheta \sin\psi$
Y_1	$-\cos\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi$	$\cos\varphi \cos\vartheta$	$\cos\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi$
Z_1	$\sin\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi$	$-\sin\varphi \cos\vartheta$	$-\sin\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi$

5.1.3. Disturbed Equations of the Motion of the Centre-of-Mass of a Rocket

In the vector form, the equations of the motion of the centre-of-mass of an LV have the following form:

$$\dot{\vec{V}} - \vec{g}(\vec{R}) = \dot{\vec{W}},$$

where $\dot{\vec{V}}$, \vec{g} , \vec{R} , $\dot{\vec{W}}$ – vectors of actual and gravity accelerations, radius-vector and the vector of the phantom acceleration, accordingly.

The above vector equation may be presented by three scalar equations by projecting it on the axes of arbitrary selected coordinate system fixed with the centre-of-mass of the LV.

The values of kinematic parameters of the motion of the centre-of-mass of the LV in AGCS for the moment of the jettison of separable parts of the LV may be determined by the method of the numerical integration of the system of equations of the LV motion:

$$\dot{V}_{\xi a} = \dot{W}_{\xi a} + g_{\xi a};$$

$$\dot{V}_{\eta a} = \dot{W}_{\eta a} + g_{\eta a};$$

$$\dot{V}_{\zeta a} = \dot{W}_{\zeta a} + g_{\zeta a};$$

$$\dot{\xi}_a = V_{\xi a};$$

$$\dot{\eta}_a = V_{\eta a};$$

$$\dot{\zeta}_a = V_{\zeta a}.$$

$$\begin{vmatrix} \dot{W}_{\xi a} \\ \dot{W}_{\eta a} \\ \dot{W}_{\zeta a} \end{vmatrix} = |c| \begin{vmatrix} \dot{W}_{x0} + \Delta_t \dot{W}_{x0} \\ \dot{W}_{y0} + \Delta_t \dot{W}_{y0} \\ \dot{W}_{z0} + \Delta_t \dot{W}_{z0} \end{vmatrix};$$

$$g_{\xi a} = -g_r \sin \varphi_c - g_\omega + \Delta g_\xi;$$

$$g_{\eta a} = -g_r \cos \varphi_c \cos \lambda + \Delta g_\eta \cos \Omega_3 t - \Delta g_\zeta \sin \Omega_3 t;$$

$$g_{\zeta a} = -g_r \cos \varphi_c \sin \lambda + \Delta g_\eta \sin \Omega_3 t + \Delta g_\zeta \cos \Omega_3 t;$$

$$g_r = \frac{b_0}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{b_2}{r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi_c) + \frac{15}{8} \frac{b_4}{r^6} (21 \sin^4 \varphi_c - 14 \sin^2 \varphi_c + 1);$$

$$g_\omega = 3 \frac{b_2}{r^4} \sin \varphi_c - \frac{5}{2} \frac{b_4}{r^6} \sin \varphi_c (7 \sin^2 \varphi_c - 3);$$

$$\sin \varphi_c = \frac{\xi_a}{r}; \quad \cos \varphi_c = \frac{\eta_a}{r};$$

$$\sin \lambda = \frac{\zeta_a}{r_a}; \quad \cos \lambda = \frac{\eta_a}{r_a};$$

$$r^2 = \xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2;$$

$$r_a^2 = \xi_a^2 + \zeta_a^2,$$

where $|c|$ – matrix of the transition from the initial launch coordinate system to the absolute geocentric CS; \dot{W}_{x0} , \dot{W}_{y0} , \dot{W}_{z0} – projections of the vector of the nominal phantom acceleration to the axes of the initial launch coordinate system; $\Delta_t \dot{W}_{x0}$, $\Delta_t \dot{W}_{y0}$, $\Delta_t \dot{W}_{z0}$ – projections of the vector of the phantom acceleration increment due to CS errors; b_0 , b_2 , b_4 – serial expansion coefficients of the Earth's gravitational potential; Δg_ξ , Δg_η , Δg_ζ – anomalies of the gravitational field of the Earth; Ω_3 – angular velocity of the Earth's rotation.

The calculation of disturbed and nominal values of kinematic motion parameters is made in the absolute geocentric coordinate system with their subsequent conversion into any other convenient coordinate system.

5.1.4. Mathematical Model of Errors of the Inertial CS

Measurement errors of the j-th accelerometer

$$\Delta_t \dot{W}_j = g_0 n_{tj} + \dot{W}_{xj} n_{mj} + \dot{W}_{zj} \Delta a_{yj} + \dot{W}_{yj} \Delta a_{zj} + \dot{W}_{xj} n_j,$$

where g_0 – modules of gravity acceleration at the place of the accelerometer calibration; \dot{W}_{xj} , \dot{W}_{yj} , \dot{W}_{zj} – projections of the vector of the phantom acceleration of the LV in the direction of the accelerometric coordinate system axes.

Errors of the Angular Orientation of the GSP

With respect to the yaw axis

$$\Delta_t P = 0 - \Delta \xi_u \sin A_0 + \Delta \eta_u \cos A_0 + \int_0^t (\omega_p \cos \phi_p - \omega_B \sin \phi_p) dt;$$

With respect to the roll axis

$$\Delta_t = \varphi_0 + \Delta \eta_u \operatorname{tg} B_0 + \int_0^t (\omega_p \sin \phi_p + \omega_B \cos \phi_p) dt;$$

With respect to the pitch axis

$$\Delta_t T = \vartheta_0 + \Delta \xi_u \cos A_0 - \Delta \eta_u \sin A + \int_0^t \omega_T dt.$$

where ω_p , ω_B , ω_T – velocities of drift of the yaw, roll, and pitch gyro units; $\Delta \xi_u$, $\Delta \eta_u$ – errors of determining the components of vertical deviations.

Drifts of the j-th Gyro Unit

$$\omega_j = P_{tj} + P_{gkj} \times \dot{W}_{Xzj}/g_{0j} + P_{gzj} \times \dot{W}_{Yzj}/g_{0j},$$

where \dot{W}_{Xzj} , \dot{W}_{Yzj} – projections of the vector of phantom acceleration of the LV on the direction of axes of the coordinate system fixed to the gyro unit.

The increments of phantom acceleration in the instrument coordinate system due to the CS instrument errors are determined as

$$\begin{aligned}\Delta_t \dot{W}_{xn} &= -\dot{W}_{yn} \times \Delta_t T + \dot{W}_{zn} \times \Delta_t B + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{xj}; \\ \Delta_t \dot{W}_{yn} &= \dot{W}_{xn} \times \Delta_t T - \dot{W}_{zn} \times \Delta_t P + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{yj}; \\ \Delta_t \dot{W}_{zn} &= -\dot{W}_{xn} \times \Delta_t B + \dot{W}_{yn} \times \Delta_t P + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{zj},\end{aligned}$$

where $\Delta_t \dot{W}_{xn}$, $\Delta_t \dot{W}_{yn}$, $\Delta_t \dot{W}_{zn}$ – deviations of phantom acceleration in projections to the axes of the instrument coordinate system due to the measurement errors of three accelerometers (α , β , γ – conventional designation), whose data is used in the navigation guidance task.

The increments of phantom acceleration \dot{W}_{xj} , \dot{W}_{yj} , \dot{W}_{zj} are determined by solving the system of algebraic equations

$$\begin{aligned}\Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\alpha + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\alpha + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\alpha &= \Delta_t \dot{W} \alpha; \\ \Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\beta + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\beta + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\beta &= \Delta_t \dot{W} \beta; \\ \Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\gamma + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\gamma + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\gamma &= \Delta_t \dot{W} \gamma,\end{aligned}$$

where a_{11}^α , a_{11}^β , a_{11}^γ – of matrix $|a|$ for accelerometers α , β , γ , respectively.

Errors of Launch Point Specification of the launching device are taken into account when calculating initial conditions of integration ($V_{\xi a}^0, V_{\eta a}^0, V_{\zeta a}^0, \xi_a^0, \eta_a^0, \zeta_a^0$) and as an error of the angular orientation of the stabilized platform ($\Delta_t P$, $\Delta_t B$, $\Delta_t T$) at the launch moment.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} V_{\xi a}^0 \\ V_{\eta a}^0 \\ V_{\zeta a}^0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega_3 \zeta_a^0 \\ \Omega_3 \eta_a^0 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \xi_a^0 \\ \eta_a^0 \\ \zeta_a^0 \end{vmatrix} &= (N_0 + H_0 + \Delta H_0) \cdot \begin{vmatrix} \sin(B_0 + \Delta B_0) \\ \cos(B_0 + \Delta B_0) \cdot \cos(L_0 + \Delta L_0) \\ \cos(B_0 + \Delta B_0) \cdot \sin(L_0 + \Delta L_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^2 N_0 \sin(B_0 + \Delta B_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\ N_0 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(B_0 + \Delta B_0)}};\end{aligned}$$

$$\Delta_t P = \Delta B_0 \sin A_0 + \Delta L_0 \cos A_0 \cos B_0;$$

$$\Delta_t B = \Delta L_0 \sin B_0;$$

$$\Delta_t T = -\Delta B_0 \cos A_0 - \Delta L_0 \sin A_0 \cos B_0,$$

where A_0 – azimuth of the platform adjustment; a, e^2 – parameters of the figure of the Earth (the major semi-axis and compression); $B_0, L_0, H_0, \Delta B_0, \Delta L_0, \Delta H_0$ – latitude, longitude, altitude of the launch point and the accuracy of their determination, accordingly.

5.1.5. Deviations due to the Separation Process

Disturbances that follow the command to cut off the engine are taken into account in the form of increments of velocity and coordinates components at the moment of SC (SP) separation.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} V_{\xi a}^B \\ V_{\eta a}^B \\ V_{\zeta a}^B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} V_{\xi a}^H \\ V_{\eta a}^H \\ V_{\zeta a}^H \end{vmatrix} + (\Delta V x_0^y + \delta V_{x0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix} + (\Delta V y_0^y + \delta V_{y0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{vmatrix} + (\Delta V z_0^y + \delta V_{z0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \xi_a^B \\ \eta_a^B \\ \zeta_a^B \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \xi_a^H \\ \eta_a^H \\ \zeta_a^H \end{vmatrix} + \Delta X_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix} + \Delta Y_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{vmatrix} + \Delta Z_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \delta V_{x0} \\ \delta V_{y0} \\ \delta V_{z0} \end{vmatrix} &= \Delta V_{x1} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{vmatrix} + \Delta V_{y1} \cdot \begin{vmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{vmatrix} + \Delta V_{z1} \cdot \begin{vmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{vmatrix}; \\ \Delta V_{x1} &= \frac{\Delta I_{\text{пд}}}{m} + \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot \Delta V_{\text{отд}}^{\text{отн}}; \\ \Delta V_{y1} &= \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot V_{\text{отд}}^{\text{отн}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{отд}}; \\ \Delta V_{z1} &= \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot V_{\text{отд}}^{\text{отн}} \cdot \Delta \psi_{\text{отд}}. \end{aligned}$$

where m , $m_{\text{оч}}$ – masses of the LV and the separable part of the LV at the moment of engine cut-off; c_{ij} , d_{ij} – components of matrices $|c|$, $|d|$; $V_{\text{отд}}^{\text{отн}}$, $\Delta V_{\text{отд}}^{\text{отн}}$ – relative velocity of the SC separation from the LV and its scatter; $\Delta \vartheta_{\text{отд}}$, $\Delta \psi_{\text{отд}}$ – stabilization errors; $\Delta V x_0^y, \Delta V y_0^y, \Delta V z_0^y, \Delta X_0^y, \Delta Y_0^y, \Delta Z_0^y$ – dynamic errors.

5.1.6. Scatter of the Uncontrolled Flight Leg

The SP motion parameters and the scatter of impact points due to disturbances in the atmospheric leg of the descending trajectory branch depend mainly on the following factors:

- conditions pertaining to the atmospheric re-entry of the centre-of-mass of the SP (the velocity and the inclination angle of the velocity vector to the local horizon);
- values of the angle-of-attack limit at the atmospheric re-entry;
- SP characteristics (aerodynamic, weight, geometrical, and centring);
- atmospheric parameters (density, pressure, temperature, wind).

The study of these dependencies allows formulating the requirements for the conditions of the atmospheric re-entry and SP characteristics.

The calculation of SP scatter in the atmospheric flight leg is made using the equations of the spatial motion of the uncontrolled object adopted in ballistics for the calculation of the target trajectory and the evaluation of limit flight modes.

The output value of those calculations is the total rocket error due to the disturbances of the atmospheric leg presented as the function of the angle of SP atmospheric re-entry and re-entry velocity:

$$\Delta_{\text{atm}} = f(\vartheta_{\text{re-ent}} \text{ at } V_{\text{re-ent}} = \text{const}).$$

5.2. Analysis of Errors

Analysis of errors is performed in order to make a quantitative evaluation of the accuracy of a control system and to optimize the design of the control system.

The main reasons for errors particular to the inertial control of an LV may be divided into several categories:

- 1) errors in measurements of accelerations (instrumental errors);
- 2) errors in instrumental realization of equations (methodical errors of the powered trajectory leg) and calculation errors;
- 3) control errors;
- 4) thrust cut-off errors;
- 5) gravitational anomalies;
- 6) errors of SC motion in the atmosphere.

The first category contains the errors, which determine the ability of the inertial system to measure the object's velocity accurately. This category includes the errors of gyroscopes, accelerometers and the errors of the initial orientation, i.e. the errors, which are usually determined during the evaluation of the system's accuracy.

The second category contains the errors connected with the onboard computing equipment and the control equations realized by it. Essential errors arise when a CS is simplified.

The third category includes the ability of the LV to follow the control signal (dynamic errors).

The fourth category is connected with the cutoff of the propulsion system.

The fifth category contains the errors arising in connection with the incomplete knowledge of the gravitational forces acting on the LV and SC.

The sixth category contains the errors caused by non-standard profile of atmospheric parameters, winds as well as scatters of SC characteristics.

The main purpose of error analysis is to evaluate the quantitative impact of each error on the accuracy of the system.

Inertial systems feature the measurement errors due to the following circumstances:

- accelerometer's inability to accurately perceive the object's velocity change along the input axis (the sensitivity axis);
- the lack of coincidence between the input axis of accelerometers and the adopted measurement axis.

The first circumstance is fully determined by the operational characteristics of an accelerometer.

The second circumstance – the function of the gyroscope drift and errors in the initial orientation of the platform (the installation of accelerometers). The incoincidence between the input axis and the adopted measurement axis leads to the fact that the accelerometer perceives the acceleration component in the perpendicular direction, which explains the error in the determination of velocity.

The quantitative evaluation of the impact of each initial error on system's accuracy is usually performed in three stages.

The first stage includes the construction of the model of errors of a gyroscope, accelerometer and the platform. This model allows determining mathematically the errors of characteristics in the function of such variables as acceleration, time, temperature, etc.

The second stage covers the calculation of the impact each of the members of the error model has on the accuracy of information measurements. The resultant error in the velocity and coordinates of the object is usually determined for the moment of the termination of operation of the rocket engine.

The third stage involves the extrapolation of the object's velocity and coordinate errors at the end of the powered leg into the object's velocity and coordinate errors at the target point.

The investigation into the error equations given in Section 3.4 shows that the system's accuracy depends on both the value of the error coefficient and the profile of the object's applied acceleration. The direct approach to increasing the accuracy of systems is usually in designing such instruments where each error coefficient is reduced to a minimum.

A finer and more effective solution is connected with the reduction in the sensitivity of flight errors from initial errors. This can be achieved by selecting the optimal orientation of axes of gyroscopes and accelerometers with respect to the designed flight trajectory. So, in order to minimize the injection errors, the rockets realize the pre-launch turn of pitch gyro unit by the value of the angle: $\vartheta = \arctg \frac{W_{y_0}(t_k)}{W_{x_0}(t_k)}$ and the turn of the gyro-stabilized platform in the azimuth by the value of the angle

$$\chi = \arctg \frac{W_{z_0}(t_k)}{W_{x_0}(t_k)},$$

where $W_{x_0}(t_k)$, $W_{y_0}(t_k)$, $W_{z_0}(t_k)$ – projections of the vector of the phantom velocity in the initial launch coordinate system at the moment of the engine cutoff (CS separation).

The same effect is achieved by introducing the broken trajectory leg (free flight legs in the flight scheme with multiple engine ignitions). The introduction of the broken leg with different durations ensures different relations of projections of the vector of the phantom velocity to the axes of the instrument coordinate system, which allows minimizing the impact of inertial control errors on the deviation of a controlled parameter.

For ballistic and especially solid-propellant rockets, there is an acute problem of ensuring an acceptable scatter due to engine cutoff.

Two directions are considered.

First – the introduction of the so-called “nonius” flight leg. This is the flight leg with the low operation of the thrust engine, when the rocket’s error is compensated which was accumulated due to the scatter of main engine residual impulse. The low thrust engines are selected with such characteristics that their residual impulse is acceptably low.

Second – the rocket orientation at the moment of the engine cutoff by the so-called “v” direction. The “v” directions are the directions of rocket motion, in which the increment of velocity and coordinates do not cause any deviations in the range and lateral direction.

To reduce the scatter caused by disturbances of the atmospheric leg of the descending trajectory branch, the following is introduced:

1. SP oriented atmospheric re-entry – to reduce the scatter due to SP oscillations.
2. SP spin-up – to reduce the impact of the lateral shift of the centre-of-mass of the SP on the deviations of impact points.

Besides, by selecting the corresponding value of the ballistic coefficient (σ_x) and the angle of the atmospheric re-entry, it is possible to achieve a considerable reduction of scatter due to the atmospheric density and temperature as well as wind and scatter σ_x .

5.3. Dependence of the Injection Accuracy on Launch Conditions

By launch conditions, we understand the launch point latitude, launch azimuth, and injection orbits characteristics.

In view of the practical impossibility of the analytical solution to a defined problem, the variation in the injection accuracy, which depends on launch conditions is evaluated by direct calculations of orbital elements using the system of differential equations describing the LV disturbed motion.

It is shown that the deviations of osculating elements that characterize the shape and dimensions of the initial orbit depend on its geometrical characteristics, and the error of the spatial position of the orbital plane is determined by the launch azimuth, launch point latitude and the perigee altitude of the designed orbit.

In this case, the SC injection accuracy to one and the same orbit (in the scheme of direct injection without broken legs) does not depend practically on the payload weight (the variation of the accuracy within 5–6%, Fig. 5.4–5.7).

A typical nature of the variation in limit deviations of osculating elements of an orbit depending on launch conditions is shown in Figs. 5.8, 5.10, 5.12.

Fig. 5.8 shows the variations in the relative error of the spatial position of the orbital plane (i, Ω) depending on the launch azimuth (A_0).

The nature of variation in the spatial position of the orbital plane fully follows the nature of variation in derivatives $\partial i / \partial A_0$ and $\partial \Omega / \partial A_0$ (Fig. 5.9).

Fig. 5.10 shows the variation in the relative error along the apogee altitude (H_a) of the orbit depending on its geometrical dimensions (altitudes of the apogee H_a and the perigee H_p).

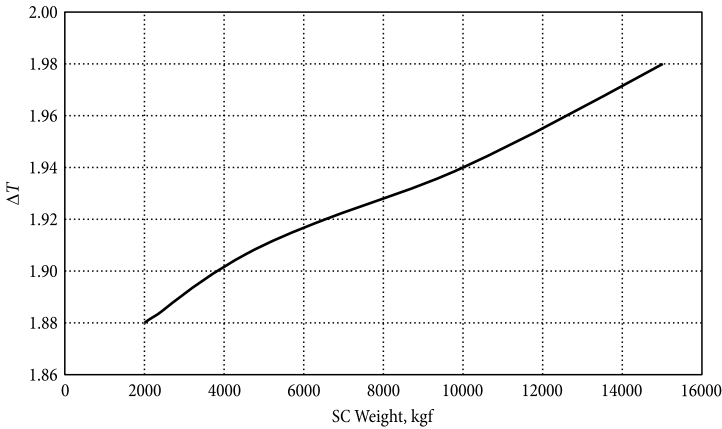


Fig. 5.4

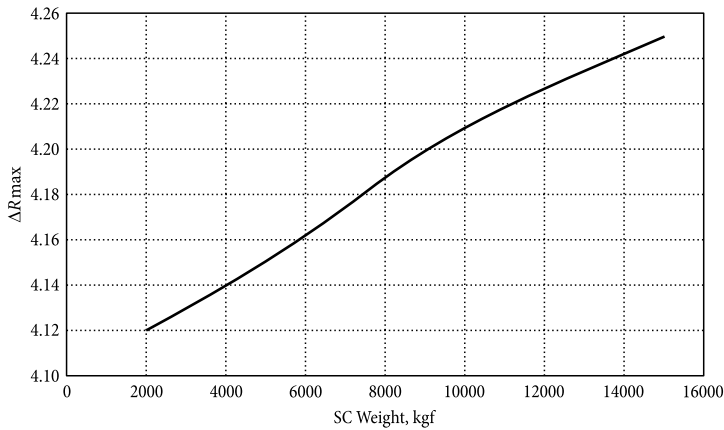


Fig. 5.5

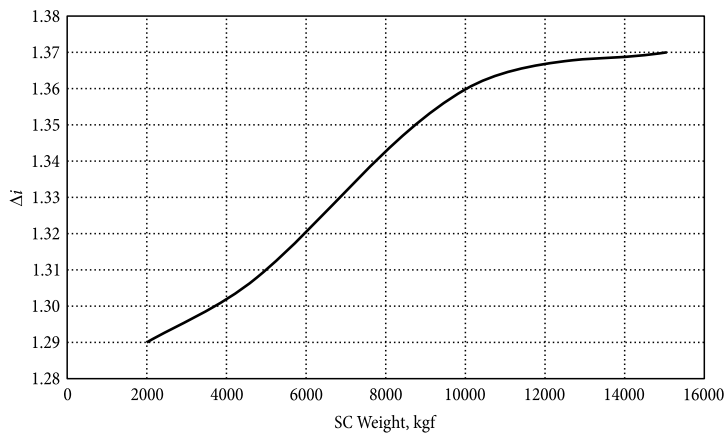


Fig. 5.6

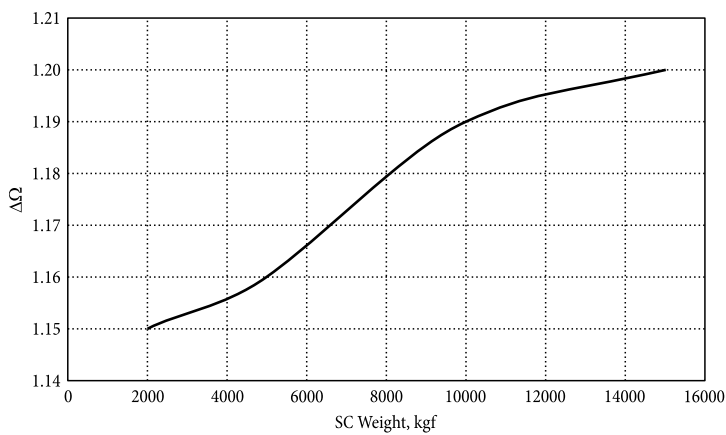


Fig. 5.7

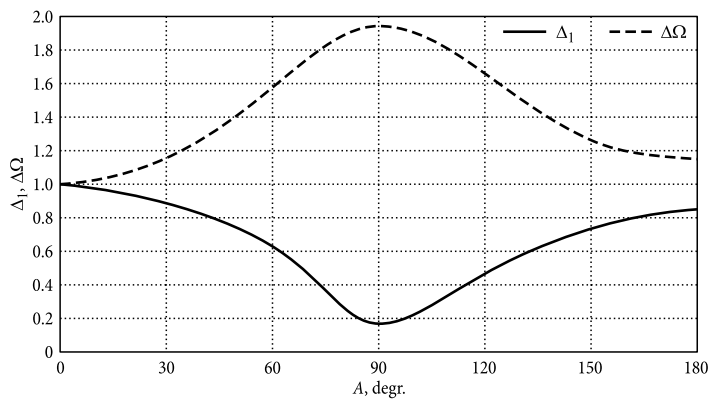


Fig. 5.8

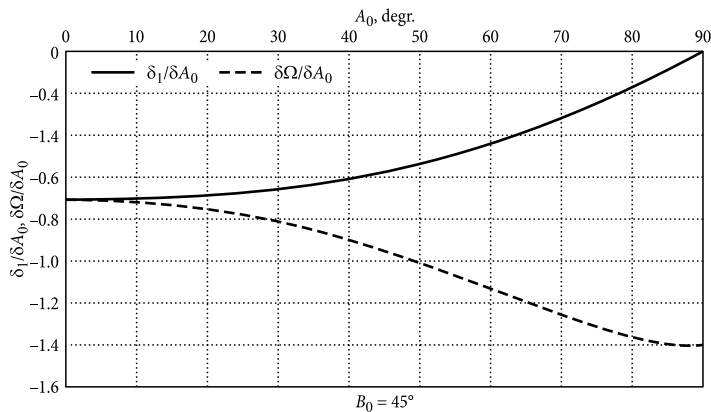


Fig. 5.9

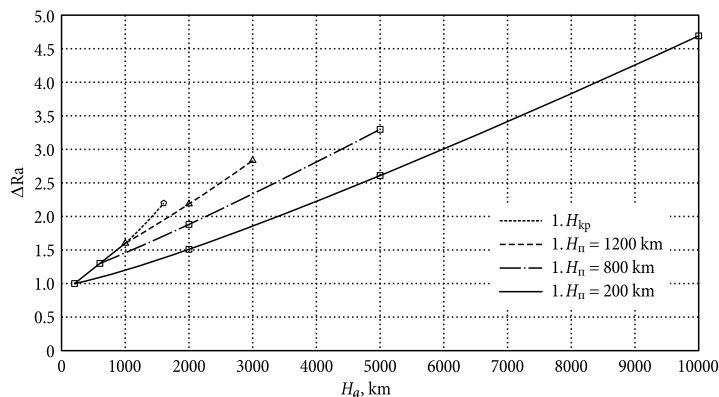


Fig. 5.10

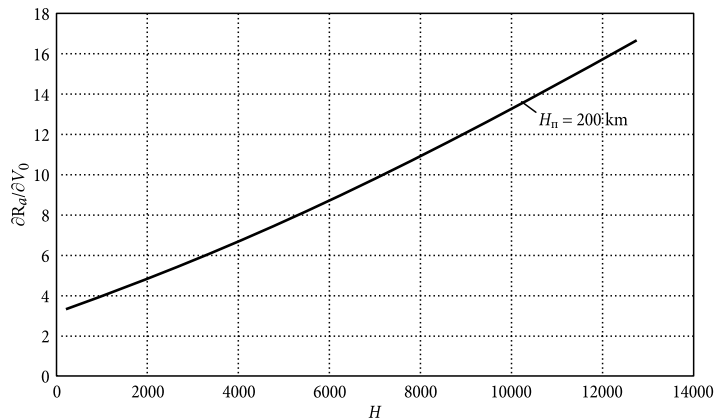


Fig. 5.11

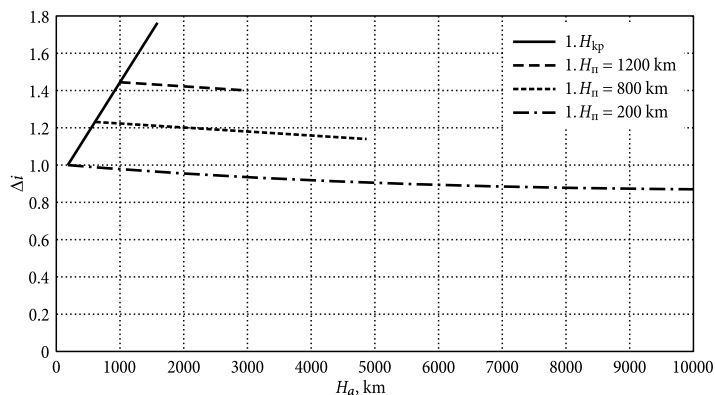


Fig. 5.12

The nature of error variation along the apogee altitude is analogous to the nature of variation in the derivative $\partial R_a / \partial V_0$ (Fig. 5.11).

Fig. 5.12 shows the error variation in orbital inclination (i) depending on geometrical dimensions of the orbit (apogee altitudes H_a and perigee altitudes H_p).

For ballistic rockets, the scatter of SP impact points is the function of the range L and re-entry angle ϑ_{BX} or the SP into the dense atmosphere. As the firing range varies from minimal to maximal, the scatter Δ increases 2–2.5 times, and the change Δ from $\vartheta_{\text{re-ent}}$ is characterized by the following values:

$\vartheta_{\text{re-ent}} - \vartheta_{\text{re-ent on r}}$	5°	10°	15°
$\frac{\Delta}{\Delta_{\text{opt}}}, \%$	10	30	100

Chapter 6

A POSTERIORI EVALUATION OF THE INJECTION ACCURACY

6.1. Statistical Processing of Test Results

6.1.1. General Remarks

To evaluate the accuracy of controlled parameters under the conditions of a limited number of tests, the method of a posteriori evaluation is used, which is called the experimental-theoretical method. The essence of this method is described next.

The determination of accuracy characteristics and the assessment of their compliance with the specified requirements are performed by the mathematical models of errors of the instruments, systems, and units, whose experimental checking and correction are made based on test results.

The calculated and experimental data used in the development of the model is obtained from the laboratory, factory, bench, and other tests of the instruments, systems, and units taking into account the adopted manufacturing tolerances.

The check and correction of the model of errors are performed by checking the statistical hypotheses:

- on the absence of significant shifts in measurement results;
- on the compliance of design scatters with their experimental values.

As disturbances acting on a tested object and errors of measuring aids, on the basis of which deviations are determined, may be considered independent, it is assumed that the measurement results are distributed according to the normal law.

The accuracy of measuring aids, on the basis of which deviations are determined, must be at least higher by a metric order (3-4 times) than the expected accuracy of measurement results.

The level of significance during the check of the hypothesis on the fact that measurement results belong to one universal set is adopted to be 1%.

The confidence probability at the check of the hypothesis on the acceptability of the mathematical model of errors used for a priori evaluation is adopted to be 0.95.

The risks of a “supplier” and “consumer” for the experimental–theoretical evaluation of accuracy characteristics, i.e. the probabilities of conditioned products or a missed defect are adopted to be equal to 0.25.

The minimal sampling volume is seven tests.

The possibility of combining the measurement results into one group is determined based on the assessment of differences in test conditions, which is performed by comparing the **calculated** values of root-mean-square deviations.

The calculated RMSD values of the measurement results combined into a common group must not differ from each other by more than 10%.

The results of failed tests and the tests, in which the instruments systems and units did not operate normally are excluded from the common group by a coordinated decision.

Prior to combining into the common group, the measurement results are refined with the corrections, including the corrections for the errors revealed during tests, which lead to a common algorithm of test data preparation.

6.1.2. Preparation of Initial Data

The initial data to evaluate accuracy characteristics of a controlled parameter are as follow:

- X_i^m – measurement result in the i -th test;
- σ_i^p – RMSD design value in the i -th test caused by errors in operation of instruments systems, and units in the test sample;
- σ_i^m – RMSD due to errors in the calculation of the parameter based on processing of measurement results in the i -th test;
- σ_p – RMSD due to errors in the initial test data preparation;
- ΔX_i^{cor} – correction of measurement results for the i -th test;
- n – number of measurement results (the sampling volume).

The measurement results are grouped based on the criterion of similar test conditions.

For orderly sampling of measurement results RMSD combined into one group

$$\sigma_1^p \leq \sigma_2^p \leq \dots \leq \sigma_n^p, \quad (6.1)$$

the coefficient is calculated

$$\delta = \frac{\sigma_n^p - \sigma_1^p}{\sigma_1^p}, \quad (6.2)$$

which must not exceed 0.1.

The average calculated value of sigma for the measurement results combined into a common group is determined by the formula:

$$\sigma_c = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i^p)^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.3)$$

The average value of sigma of the calculation error for the measurement results combined into a common group is determined by the formula:

$$\sigma_m = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i^m)^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.4)$$

The a priori (expected) value of sigma for the measurement results combined into a common group is determined by the formula:

$$\sigma_i = \left\{ \sigma_c^2 + \sigma_m^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.5)$$

The weight coefficients P_{Xi} are determined

$$P_{Xi} = \frac{(\sigma_c)^2 + (\sigma_m)^2}{(\sigma_i^c)^2 + (\sigma_i^m)^2}, \quad (6.6)$$

and the sum of weights for the adopted set

$$P_X = \sum_{i=1}^n P_{Xi}. \quad (6.7)$$

Prior to combining into a common group, the measurement results are refined with corrections, including for the errors revealed during tests.

The corrected measurement result is determined as

$$X_i = X_i^m + \Delta X_i^{cor}. \quad (6.8)$$

6.1.3. Assessment of the Abnormality of Measurement Results

For orderly sampling of corrected measurement results

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n. \quad (6.9)$$

The average weight of measurement results is found

$$X_{mid} = \frac{1}{P_X} \cdot \sum_{i=1}^n P_{Xi} \cdot X_i. \quad (6.10)$$

The sampling root-mean-square deviation is calculated

$$S = \left\{ \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n P_{Xi} (X_i - X_{mid})^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.11)$$

The ratios are calculated

$$t_n = \frac{X_n - X_{mid}}{S};$$

$$t_1 = \frac{X_{mid} - X_1}{S} \quad (6.12)$$

The ratio $t_n(t_1)$ is compared with the value $\beta(n)$, taken from the table of coefficients (Table 6.1).

If $t_n(t_1) \geq \beta$, then the measurement result, which is suspected to be abnormal X_n (or X_1) is actually abnormal, and it is excluded from further processing. The measurement results of other controlled parameters of this test are also excluded. Otherwise, the suspected result is considered to be normal and not excluded.

After the exclusion, the remaining results are again checked for abnormality according to the above rules.

When the new data is added to the common group and the corrections are made to the measurement results, the check of all the results belonging to one universal set is made taking into account the measurements that have been earlier excluded.

6.1.4. Processing of Experimental Data

Evaluation of Shift

For those “ n ” of measurement results, which after the fulfilment of items of Section 6.1.3 are assumed as a part of the universal set, the experimental value of shift (X_m) is calculated by formula (6.10). Then, using the formula (6.11), the sampling root-mean-square deviation (S) is calculated.

The boundaries of confidence intervals are determined

$$X_{\min} = X_{\text{mid}} - \left\{ \left[\tau(n) \cdot S \right]^2 + \left[1,96 \cdot \sigma_c \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (6.13)$$

$$X_{\max} = X_{\text{mid}} + \left\{ \left[\tau(n) \cdot S \right]^2 + \left[1,96 \cdot \sigma_c \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.14)$$

The values $t(n)$ are taken from the table of coefficients (Table 6.1).

If the confidence interval $[X_{\min}, X_{\max}]$ contains a zero, the conclusion is made on the absence of a significant shift in the measurement results.

If the confidence interval $[X_{\min}, X_{\max}]$ does not contain a zero, it is considered that there is a significant shift, and it is required to reveal the reasons for the shift.

As an exception, in the capacity of a temporary measure before the reason is revealed, it is allowed to introduce a coordinated empirical correction that compensates for that shift or its part.

Upon refinement of the factors in the algorithms of test data preparation and upon introduction of the corrections into the measurement results, the shift is again evaluated according to the rules set out in Section 6.1.3.

Evaluation of Scatter

To check the hypothesis on acceptability of the mathematical model of errors used in the calculation of accuracy characteristics, the allowable RMSD value is calculated

$$\sigma_{\text{доп}} = \gamma_d(n) \times S. \quad (6.15)$$

Table 6.1. Table of Coefficients

n	β	τ	γ_u	γ_l	γ_d
3	1.15	2.484	1.86	0.849	0.578
4	1.49	1.591	1.57	0.855	0.620
5	1.75	1.242	1.44	0.862	0.649
6	1.94	1.050	1.37	0.869	0.672
7	2.10	0.927	1.32	0.875	0.690
8	2.22	0.837	1.28	0.880	0.705
9	2.32	0.769	1.26	0.885	0.718
10	2.41	0.715	1.24	0.889	0.729
11	2.48	0.672	1.22	0.893	0.739
12	2.55	0.636	1.20	0.896	0.748
13	2.61	0.604	1.19	0.900	0.755
14	2.66	0.577	1.18	0.902	0.762
15	2.70	0.554	1.17	0.904	0.769
16	2.75	0.533	1.17	0.907	0.775
17	2.78	0.514	1.16	0.909	0.780
18	2.82	0.497	1.15	0.911	0.785
19	2.85	0.482	1.15	0.913	0.790
20	2.88	0.468	1.14	0.914	0.794

The values $\gamma_d(n)$ are taken from the table of coefficients (Table 6.1).

The result is compared with the a priori value of sigma (σ_0 , formula (6.5)).

If $\sigma_{\text{доп}} > \sigma_0$, it is considered that the adopted mathematical model of errors does not satisfy the test conditions and needs refinement.

If $\sigma_{\text{доп}} \leq \sigma_0$, it is accepted that the model of errors satisfies the test results.

Upon the correction (if required) of the mathematical model of errors, the boundary of the confidence interval for root-mean-square deviation is found:

– the upper

$$\sigma_u = \gamma_u(n) \times S; \quad (6.16)$$

– the lower

$$\sigma_l = \gamma_l(n) \times S. \quad (6.17)$$

The values $\gamma_u(n)$ and $\gamma_l(n)$ are taken from the table of coefficients (Table 6.1).

As a result of correlation of a priori value of sigma (σ_0) with the boundaries of confidence intervals $[\sigma_p, \sigma_u]$, one of the following inequalities may be fulfilled:

$$\sigma_l \leq \sigma_0 \leq \sigma_u, \quad (6.18)$$

$$\sigma_0 < \sigma_p \quad (6.19)$$

$$\sigma_u < \sigma_0. \quad (6.20)$$

If the confidence interval $[\sigma_p, \sigma_u]$ contains the a priori value of sigma (inequality (6.18)), as the experimental-theoretical value of root-mean-square error* (σ^*) of the measurement result for the test conditions, its design value is taken

$$\sigma^* = \sigma_c. \quad (6.21)$$

If the confidence interval $[\sigma_p, \sigma_u]$ does not contain the a priori value of sigma (inequalities (6.19) or (6.20)), as the experimental theoretical value of root-mean-square error σ^* of the measurement result for the test conditions, the following is taken

$$\sigma^* = \sigma_c \cdot \frac{\sigma_l}{\sigma_0}, \quad (6.22)$$

or

$$\sigma^* = \sigma_c \cdot \frac{\sigma_u}{\sigma_0} \quad (6.23)$$

accordingly, for equality (6.18) or (6.19).

The conversion of RMSE experimental-theoretical value to the j -th conditions of operation is performed by the formula

$$\sigma_j^* = (1 + \delta) \times \sigma_j^p, \quad (6.24)$$

where δ – misalignment of experimental and calculated sigma for the test conditions.

The misalignment for each k -th controlled parameter is determined by the formula

$$\delta = \frac{\sigma^* - \sigma_c}{\sigma_c}. \quad (6.25)$$

If several (m) controlled parameters exist and if their result cannot be considered as independent from the others, as an exception, in the capacity of a temporary measure till revealing the reasons for the difference between the experimental and calculated sigmas, the misalignment δ is determined as the average arithmetic value of misalignments δ_k

$$\delta = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \delta_k. \quad (6.26)$$

Evaluation of Maximal Deviations

The maximal limit deviations of a controlled parameter are determined by the formula

$$\Delta_{exp} = |X_{mid} \pm K_b \cdot \sigma^*|,$$

where K_b – quantile corresponding to the specified confidence probability.

The conversion of maximal limit deviations to the required (j -th) conditions of operation is performed by the formula

$$\Delta_j = k_{coord} \cdot \sigma_j^c,$$

where k_{coord} – coefficient of coordination of experimental and calculation maximal limit deviations.

The coefficient of coordination for each is determined by the formula

$$k_{coord} = \frac{\Delta_{exp}}{\Delta_c}.$$

If several (m) controlled parameters exist, in the case when the results of their measurement cannot be considered as independent from each other, as an exception, in the capacity of a temporary measure till revealing the reasons for the difference between the experimental and calculated limit deviations, the coefficient of coordination k_{coord} is determined as the arithmetic average of values k_{coord_i}

$$k_{coord} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k_{coord_i}.$$

Checking the Compliance of Experimental Characteristics with Specified Requirements

A specified requirement for a controlled parameter is considered fulfilled if:

- in each i -th test, the deviation X_i does not exceed

$$X_i \leq 3.0 \sigma_0; \quad (6.27)$$

- there is no significant shift of X_{mid} for a set of tests;
- the experimental-theoretical value of the scatter σ^* for the conditions specified in the problem does not exceed the required value

$$\sigma^* \leq \sigma_r. \quad (6.28)$$

6.2. A Posteriori Analysis of Errors

Errors that affect the total error of a ballistic rocket may be divided into two categories: the errors arising in the powered flight leg and the errors arising during a free flight and at the re-entry into the dense atmosphere.

The reasons for errors during the powered flight leg are as follow:

- inaccurate operation of the control system (instrumental errors);
- the inaccuracy of performing the control signal coming from the control system to the regulating system;
- inaccurate performing by the propulsion system of the command to engine cutoff (errors of the separation system, residual impulse).

A flight data analysis aims to determine such errors and their origin.

While the errors arising in the propulsion system regulating and cutoff system are usually determined by the telemetry data, the final navigation accuracy of the control system can be determined through the comparison of its output data with highly-accurate data on rocket velocity and its coordinates obtained by the method of trajectory measurements.

It should be noted that none of the trajectory measurement systems could ensure measurements with the required accuracy along the entire flight trajectory. Therefore, the analysis will use the data from different tracking systems in order to construct a maximally accurate trajectory.

When analysing the flight test data, in the first turn, it is required to determine the total error due to errors in the control system (Δ_{AY}) and disturbances of a non-powered flight (Δ_{IY})

$$\begin{aligned}\Delta_{IY} &= \Delta_1 - \Delta_2; \\ \Delta_{AY} &= \Delta_2.\end{aligned}$$

where Δ_2 – predicted error of the rocket based on the data of trajectory measurements; Δ_1 – total error of the rocket based on the geodetic data of measurement data.

To reveal the sources of big errors of the inertial measurement element, it is most useful to consider the curve of errors in velocity at first.

Example: λ – accelerometer.

Typical CS errors when determining the velocity in λ -channel are as follow:

- the error of delay $\Delta V_C = \Delta \tau \dot{W}_\lambda$;
- the error of the scale coefficient $\Delta V_g = \Delta K_1 \times W_\lambda$;
- the error due to the zero shift $\Delta V_0 = \Delta K_2 t$.

The following dependencies are obvious:

- the error in the velocity due to the delay is determined by the profile of accelerations and is proportional to the acceleration at the given moment;
- the error of zero leads to the error in velocity, which linearly varies in time.

Taking into account the difference in the shape (weak correlation) of these curves, we may determine some sources of CS errors having considered the profile of velocity errors and coordinate errors.

Chapter 7

EXPERIMENTAL-THEORETICAL CHARACTERISTICS OF THE INJECTION ACCURACY

The evaluation of the injection accuracy was performed by the technique set out in Section 6.

7.1. Zenit Launch Vehicle

The family of Zenit launch vehicles includes (Fig. 7.1):

- two-stage Zenit-2 LVs,
- three-stage Zenit-3 SLs.

Zenit LVs were introduced:

- in 1985, with the first launch of a two-stage Zenit-2 LV,
- in 1999, with the first launch of a three-stage Zenit-3SL LV.

The SC launches by Zenit-2 launch vehicles were conducted from GIK RF DM launch base Baikonur, mainly into a circular orbit of the Earth, amounting to 850 km.

The SC launches by Zenit-3SL launch vehicle were conducted from the Pacific Ocean into elliptical near-equatorial orbits with the perigee altitude of 200 to 8600 km and the apogee altitude of up to 41440 km. All the SCs were injected according to the scheme with the re-injection: the first two stages (Zenit-2S LV) ensured the injection of the upper stage (DM-SL US) with the SC into the open intermediate orbit. Further SC injection into the target (geostationary transfer) orbit was ensured by DM-SL US with a single or double ignition of the main engine.

Injection Accuracy of a Zenit-2 LV

By the criterion of the similarity of launch conditions, the evaluation of the injection accuracy of Zenit-2 LVs was made based on the set of twelve SC launches in a near-circular orbit of approx. 850 km in altitude, using the data on deviations in the inclination of the orbital plane (Δi) and the ascending node longitude ($\Delta \Omega$) for two SC launches into a near-circular orbit with the altitude of approx. 200 km.

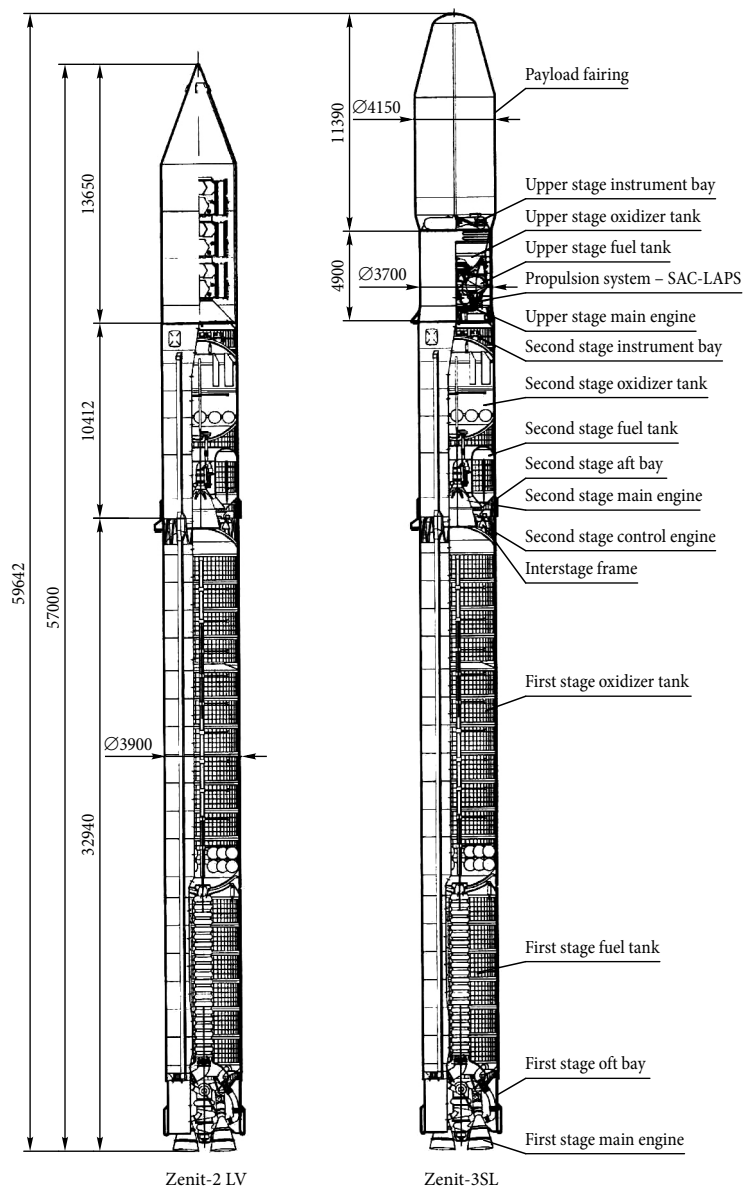


Fig. 7.1

The volume of sampling was:

- for the inclination of the orbital plane – 14 launches;
- for the SC orbital period – 12 launches;
- for the maximal altitude – 11 launches;
- for the longitude of the ascending node – 8 launches.

Table 7.1. Statistical Data on the Injection Accuracy of a Zenit-2 LV

Sampling Characteristic	Controlled Parameter			
	i , arc. min	T , s	H_{\max} , km	Ω , arc. min
Evaluation of the mathematical expectation	-0.22	-0.68	-1.30	-1.32
RMSD evaluation	0.54	0.82	1.55	0.53
Values of extreme terms in sampling:				
minimal value	-1.08	-2.35	-4.60	-2.25
maximal value	1.01	0.49	0.71	-0.75
Allowable extreme value:				
minimal value	-1.65	-2.76	-5.14	-2.50
maximal value	1.21	1.41	2.55	-0.14

The results of statistical processing of the experimental and calculation values of the osculating orbital parameters at the injection point are given in Table 7.1.

According to the presented data, there are no grounds to consider the extreme values in sampling as abnormal.

The results of the experimental-theoretical evaluation of the injection accuracy of Zenit-2 LVs are given in Table 7.2.

According to the results of experimental-theoretical evaluation of the injection accuracy of Zenit-2 LVs that:

1. The boundaries of confidence intervals for the mathematical expectation of parameters T , H_{\max} , Ω do not include their design values (equal to zero), which

Table 7.2. Experimental-Theoretical Characteristics

Sampling Characteristic	Controlled Parameter			
	i , arc. min	T , s	H_{\max} , km	Ω , arc.min
Evaluation of the mathematical expectation $\bar{\Delta}$	-0.22	-0.68	-1.30	-1.32
Boundaries of confidence intervals for ME:				
minimal Δ_{\min}	-0.53	-1.20	2.34	-1.76
maximal Δ_{\max}	0.09	-0.16	-0.25	-0.87
Evaluation of root-mean-square deviation S	0.54	0.82	1.55	0.53
Boundaries of confidence intervals for RMSD:				
lower σ_1	0.49	0.73	1.39	0.47
upper σ_2	0.64	0.98	1.89	0.68
RMSD experimental-theoretical value σ^*	0.50	0.98	1.89	0.65
Misalignment of experimental and theoretical RMSD δ	0.00	-0.12	-0.05	0.00
The limit deviation $P = 0.995$	2.0	3.44	6.61	3.23
Coefficient of coordination k_{coord}	1.6	1.1	1.2	1.7

testifies to the existence of significant systematic shifts. For the parameter ΔI , the significant shift is absent.

2. The experimental estimates of controlled parameters RMSD do not exceed their design values, which confirms the acceptability of the model used for mathematical errors of an SC for a priori calculations of the injection accuracy of an SC.
3. The misalignment of RMSD experimental and calculated values is close to zero.
4. Under conditions of uncertain corrections to the identified mathematic expectations in the deviations of controlled orbital parameters, the experimental coefficient of coordination of the model of CS errors for the calculation of maximal limit deviations is 1.3...1.4.

With the use of the updated mathematical model of CS errors, the limit (with the probability $P = 0.995$) deviations of orbital elements at SC injection into a 200 km circular orbit do not exceed:

- the altitude ± 3.5 km;
- the orbital period ± 2.5 s;
- the inclination of the orbital plane $\pm 0.034^\circ$.

The achieved level ensured the leading position for the Zenit-2 system among the most accurate present-day space launch systems.

Injection of the LV Zenit-3 SL

The evaluation of spacecraft injection accuracy of Zenit-3 SL by the criterion of similarity of launch conditions was made:

- by apogee and perigee altitudes – for the total of 19 and 11 LV launches (options 1 and 2 of the sampling);
- by inclination – for the total of 30 LV launches (option 3 of the sampling).

Option 1 of the sampling includes the LV launches with the perigee altitude of 200 to 2300 km – the generic injection scheme into geostationary transfer orbit (GTO) with two ignitions of the main engine of the DM-SL upper stage with a pause between burns of 30...60 min.

Option 2 of the sampling includes the LV launches with perigee altitudes of up to 300 km and above 2300 km – the “direct” injection scheme into GTO with one ignition of the main engine of the DM-SL upper stage or with two ignitions, but a pause between the burns is more than 40 min.

The results of all LV launches were used in the evaluation of the injection accuracy by inclination. In this case, the modulus of differences between the experimental and design inclination values was evaluated (for equatorial orbits, the inclination measurement result is always positive).

The analysis of results of first SC launches (according to the information on the state vector, registered in the CS telemetry frame of the CS of the DM-SL upper stage for the time moment directly preceding the SC separation from the upper stage) showed that the altitude of the apogee of the target orbit exceeds the nominal value by approx. 30 km. The reason behind this exceedance was the increase in the delay of engine cutoff by approx. 40 ms, which led to the increase in the residual impulse by 300 kgf×s.

Beginning from the upper stage No. 11L, when forming the command to cut off the main engine, the actual residual impulse was taken into account. The corrections for the off-design residual impulse of the engine were introduced into the results of measurement of actual parameter deviations of all the previous launches. Also, the corrections were introduced for the nominal impulse of separation of the SC from the DM-SL block, as the injection orbit requirements had been specified without taking this impulse into account.

The results of statistical processing of the differences between the experimental and design values of osculating orbital elements reduced to uniform launch conditions, for the moment of the first passage of the SC of orbital apogee are given in Table 7.3.

According to the presented data, there is no grounds to consider the extreme values in the sampling as abnormal.

The results of experimental-theoretical evaluation of the injection accuracy of Zenit-3 SL are given in Table 7.4.

According to the results of experimental-theoretical evaluation of the SC injection accuracy achieved by the DM-SL upper stage:

- 1. The boundaries of confidence intervals for mathematical expectations in deviations of controlled orbital parameters (apogee and perigee altitudes, inclina-

Table 7.3. Statistical Data on the Injection Accuracy

Sampling Characteristic	Controlled Parameter				
	Option 1		Option 2		Option 3
	Ha, km	Hp, km	Ha, km	Hp, km	i , degrees
Evaluation of the mathematical expectation	0.22	−1.10	−24.09	−0.02	0.027
Evaluation of RMSD	14.95	1.96	27.28	1.04	0.021
Values of extreme terms in the sampling:					
minimal value	−31.8	−3.6	−69.6	−2.2	0.002
maximal value	20.3	2.9	15.8	1.8	0.075
Allowable extreme values:					
minimal value	−42.38	−6.68	−91.75	−2.59	−0.038
maximal value	42.81	4.48	43.57	2.55	0.092

Table 7.4. Experimental-Theoretical Characteristics

Sampling Characteristic	Controlled Parameter				
	Option 1		Option 2		Option 3
	Ha, km	Ha, km	Ha, km	Ha, km	Ha, km
Evaluation of the mathematical expectation $\bar{\Delta}$	0.22	-1.10	-24.09	-0.02	0.027
Boundaries of confidence intervals for ME: minimal Δ_{\min} maximal Δ_{\max}	-6.99 7.42	-2.04 -0.15	-42.43 -5.76	-0.72 0.68	0.019 0.035
Evaluation of root-mean-square deviation S	14.95	1.96	27.28	1.04	0.021
Boundaries of confidence intervals for RMS-deviation: lower σ_1 upper σ_2	13.65 17.19	1.79 2.25	24.36 33.28	0.93 1.26	0.019 0.023
Experimental-theoretical value of RMS-deviation σ^*	13.65	1.79	24.74	0.93	0.023
Mismatch of experimental and design RMS-deviations δ	0.07	0.43	0.76	0.38	-0.284
Limit deviation $P = 0.98$	40.27	6.35	101.64	2.96	0.081
Coefficient of coordination k_{coord}	1.35	2.18	1.76	1.38	1.07

tion) include their design values ($(\bar{\Delta}) Ha = (\bar{\Delta}) Hp = 0$ km, $(\bar{\Delta}) |i| = 0.033^\circ$, which testifies to the absence of significant systematic shifts in these parameters.

2. The experimental evaluations of root-mean-square deviations in controlled parameters of the target orbit do not differ considerably from their design values, which confirms the acceptability of their use for a priori calculations of the SC injection accuracy of the mathematical model of CS errors.
3. The mismatch between experimental and design values of RMSD is close to zero.
4. Under conditions of uncertain corrections to the identified mathematic expectations in the deviations of controlled orbital parameters, the experimental coefficient of coordination of the model of CS errors for the calculation of maximal limit deviations is 1.3, ..., 1.4.

With the use of the updated mathematical model of CS errors, the limit (with the probability $P = 0.98$) deviations of orbital elements at SC injection into the standard geostationary transfer orbit with the perigee altitude $Hp = 200$ km, apogee $Ha = 35786$ km and inclination $i = 0^\circ$ do not exceed:

- for the perigee altitude ± 10.0 km;
- for the apogee altitude ± 80.0 km;
- in the inclination of the orbital plane $\pm 0.2^\circ$.

7.2. Cyclone Launch Vehicle

The family of Cyclone launch vehicles (Fig. 7.2) includes:

- two-stage Cyclone-2 LVs;
- three-stage Cyclone-3 LVs.

The family of Cyclone LVs belong to the most reliable in the world.

Cyclone LVs were introduced:

- in 1969, with the first launch of a two-stage Cyclone-2 LV;
- in 1977, with the first launch of a three-stage Cyclone-3 LV.

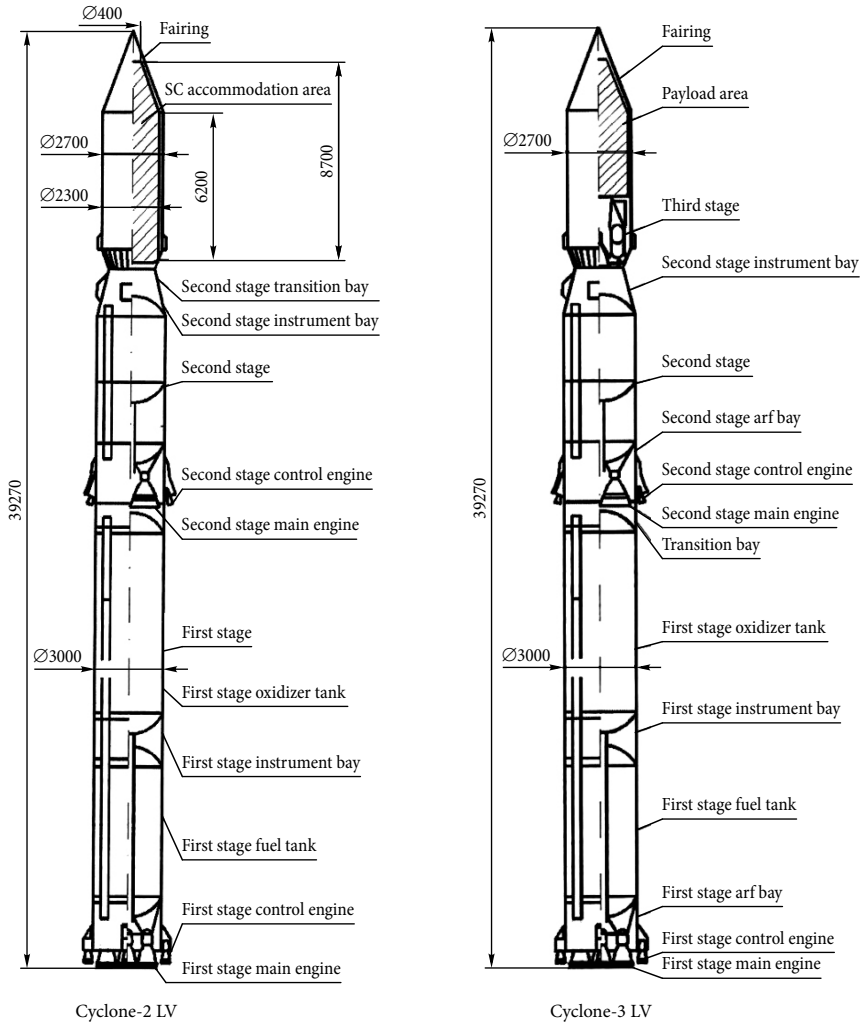


Fig. 7.2

By now, 105 successful launches of Cyclone-2 LV and 115 successful launches of Cyclone-3 LV were conducted.

The SC launches by Cyclone-3 launch vehicle were conducted from the *Plesetsk* Cosmodrome of Russian Defence Ministry GIK, mainly into near-circular orbits with the altitude of 500 to 1700 km.

By the criterion of similarity of launch conditions, all components of orbital elements were combined into two main groups.

The first group includes the results of Cyclone-3 LV launches into near-circular orbits with the altitude of up to 1000 km.

The second group includes the results of Cyclone-3 LV launches into near-circular orbits with the altitudes higher than 1000 km.

The results of Cyclone-2 LV launches conducted from *Baikonur* Cosmodrome of the Russian Defence Ministry GIK are attributed to the third group.

The following parameters at the injection point are assumed as controlled by the injection accuracy:

1. For Cyclone-3 LVs – elements of an osculating orbit:
 - the angle of the orbital plane inclination – i ,
 - the orbital period – T_{osc} ,
 - the radius-vector – H_{max} .
2. For Cyclone-2 LV, the LV stage vector in the orbital coordinate system:
 - the components of the velocity vector – V_n, V_r, V_B ,
 - the components of the position vector – R_n, R_r, R_B .

The results of statistical processing of the differences between experimental and design values of orbital elements are presented in Tables 7.5 and 7.6.

The results of experimental-theoretical evaluation of the SC injection accuracy are presented in Tables 7.7, 7.8 and 7.9.

Table 7.5. Statistical Data on the Injection Accuracy of Cyclone-3 LVs

Sampling Characteristics	Controlled Parameter					
	500 km < H_{cip} < 1000 km			1000 km < H_{cip} < 1700 km		
	i , arcmin	T_{osc} , s	H_{max} , km	i , arcmin	T_{osc} , s	H_{max} , km
ME evaluation	0.50	1.50	4.57	0.96	2.13	4.58
RMS deviation evaluation	0.93	1.62	4.33	1.23	2.29	4.77
Values of extreme terms in sampling:						
minimal	-1.87	-1.65	-8.21	-1.90	-1.2	-5.90
maximal	3.30	5.52	10.56	3.57	9.3	11.10
Note:	deviation in $\Delta_i = -3,8$ arcmin is considered as abnormal			no abnormal deviations were registered		

Table 7.6. Statistical Data on the Injection Accuracy of Cyclone-2 LVs

Sampling Characteristics	Controlled Parameter					
	V_n , m/s	V_p , m/s	V_B , m/s	R_n , km	R_p , km	R_B , km
ME evaluation	0.51	-0.53	-2.11	0.09	-0.19	-0.30
RMSD evaluation	1.36		3.53	0.29	0.31	0.38
Values of extreme terms in sampling:						
minimal	-3.84	-8.01	-11.90	-0.70	-1.15	-1.23
maximal	3.90	4.40	4.90	0.93	0.67	0.63
Note:	deviation in $\Delta V_n = +5.9$ m/s is considered as abnormal			deviation in $\Delta R_n = -1.5$ km is considered abnormal		

Table 7.7. Experimental-Theoretical Characteristics of the Injection Accuracy of Cyclone-3 LVs (500 km < Hcir < 1000 km)

Characteristic	Controlled Parameter		
	i , arcmin	T_{osc} , s	H_{max} , km
ME evaluation $\bar{\Delta}$	0.50	1.50	4.57
Boundaries of confidence intervals for ME:			
minimal Δ_{min}	0.27	1.09	3.43
maximal Δ_{max}	0.74	1.90	5.71
RMS deviation S	0.93	1.62	4.33
RMSD lower boundary σ_1	0.88	1.54	4.09
RMSD upper boundary σ_2	1.00	1.73	4.65
RMSD experimental-theoretical value σ^*	0.88	1.73	4.65
Mismatches of experimental and design RMSD δ	0.19	-0.21	-0.17
Limit deviations $P = 0.993$	2.9	6.2	17.2
Coefficient of coordination k_{match}	1.5	1.3	1.1

Table 7.8. Experimental-Theoretical Characteristics of the Injection Accuracy of Cyclone-3 LVs (1000 km < Hcip < 1700 km)

Characteristic	Controlled Parameter		
	i , arcmin	T_{osc} , s	H_{max} , km
ME evaluation $\bar{\Delta}$	0.96	2.13	4.58
Boundaries of confidence intervals for ME:			
minimal Δ_{min}			
maximal Δ_{max}			
RMSD deviation S	0.55	1.37	2.98
RMSD lower boundary σ_1	1.37	2.89	6.18
RMSD upper boundary σ_2	1.23	2.29	4.77

End of Table 7.8

Characteristic	Controlled Parameter		
	i , arcmin	T_{osc} , s	H_{max} , km
RMSD experimental-theoretical value σ^*	1.15	2.13	4.44
Mismatches of experimental and design RMSD δ	1.35	2.51	5.25
Limit deviations $P = 0.993$	1.15	2.51	5.25
Coefficient of coordination k_{match}	0.21	-0.21	-0.27

Table 7.9. Experimental-Theoretical Characteristics of the Injection Accuracy of Cyclone-2 LVs

Characteristic	Controlled Parameter					
	V_n , m/s	V_r , m/s	V_B , m/s	R_n , km	R_r , km	R_B , km
ME evaluation $\bar{\Delta}$	0.51	-0.53	-2.11	0.09	-0.19	-0.30
Boundaries of confidence intervals for ME:						
minimal Δ_{min}	0.19	-1.07	-2.94	0.03	-0.26	-0.39
maximal Δ_{max}	0.53	0.01	-1.28	0.16	-0.12	-0.21
RMSD evaluation S	1.36	2.29	3.53	0.29	0.31	0.38
RMSD lower boundary σ_1	1.30	2.17	3.36	0.27	0.29	0.36
RMSD upper boundary σ_2	1.45	2.43	3.76	0.30	0.33	0.40
RMSD experimental-theoretical value σ^*	1.30	2.43	3.36	0.27	0.33	0.36
Mismatches of experimental and design RMSD δ	1.03	-0.24	0.29	0.10	-0.15	0.58
Limit deviations $P = 0.993$	4.0	7.1	11.2	0.8	1.1	1.3
Matching coefficient k_{match}	2.3	1.6	1.6	1.2	1.0	2.1

The presented data lead to the following conclusions:

Cyclone-3 LVs

1. The boundaries of confidence intervals for the mathematical expectations in deviations of parameters i , T_{osc} , H_{max} do not include their design values (equal to zero), which testifies to the existence of significant systematic shifts.

For the whole totality of LV launches, the average weighted value of the shift in orbital parameter deviations was:

- for the orbital period – plus 0.7 arcmin;
- for the orbital period – plus 1.6 s;
- for the altitude – plus 4.5 km.

2. The experimental evaluations of root-mean-square deviations of controlled parameters T_{osc} , H_{max} did not exceed and of parameter i – exceeded their design values. The following are taken as experimental-theoretical, values closest to the design values:
 - the upper boundaries of confidence intervals (σ_2) for parameters T_{osc} and H_{max} ;
 - the lower boundaries of the confidence interval (σ_1) for parameter i .
3. The mismatch of experimental and design root-mean-square deviations was:
 - for the inclination – plus 0.20;
 - for the orbital period – minus 0.21;
 - for the altitude – minus 0.21.
4. The experimental matching factor of CS error model for the calculation of the maximal limit deviations is 1.2–1.3.

Cyclone-2 LVs

1. The boundaries of confidence intervals for the mathematical expectations in deviations of parameters V_n , V_B , R_n , R_r , R_B do not include their design values (equal to zero), which testifies to the existence of significant systematic shifts. For the parameter V_r , the systematic component in the deviations is absent.
2. The experimental evaluations of root-mean-square deviations of controlled parameters V_r , R_r did not exceed and of parameters V_n , V_B , R_n , R_B – exceeded their design values. The following are taken as experimental-theoretical evaluations closest to the design values:
 - upper boundaries of confidence intervals (σ_2) for parameters V_r , R_r ;
 - lower boundaries of confidence intervals (σ_1) for parameters V_n , V_B , R_n , R_B .
3. The mismatch of experimental and design root-mean-square deviations was plus 0.4.

The normalized covariance matrix of injection errors corresponding to experimental deviations is as follows:

$$K_{\text{норм}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_n & V_r & V_B & R_r & R_r & R_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_n \\ V_r \\ V_B \\ V_n \\ R_r \\ R_B \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1.00000 & -0.18322 & -0.10099 & 0.09944 & -0.23735 & -0.09568 \\ -0.18322 & 1.0000 & 0.12576 & -0.40151 & 0.39610 & 0.15235 \\ -0.10099 & 0.12576 & 1.00000 & -0.15052 & -0.05961 & 0.82013 \\ 0.09944 & -0.40151 & -0.15052 & 1.00000 & -0.19538 & -0.03815 \\ -0.23735 & 0.39610 & -0.05961 & -0.19538 & 1.00000 & 0.05878 \\ -0.09568 & 0.15235 & 0.82013 & -0.03815 & 0.05878 & 1.00000 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

4. The experimental matching factor of the CS error model at calculation of maximal limit deviations is 1.6.

According to the analysis of the above data that at launches from *Plesetsk* Cosmodrome, a Cyclone-3 launch vehicle ensures the spacecraft injection with limit errors not more than (with the probability $P = 0.993$):

Altitude of the near-circular orbit at 600 km

- for the radius – ± 15 km;
- for the orbital period – ± 5 s;
- for the inclination – ± 5 arcmin

Altitude of the near-circular orbit at 1500 km

- for the radius – ± 20 km;
- for the orbital period – ± 10 s;
- for the inclination – ± 5 arcmin.

At launches from *Baikonur* Cosmodrome, a Cyclone-2 launch vehicle ensures the spacecraft injection into a near-circular orbit at 200 km with limit errors not more than (with the probability $P = 0.993$)

- for the radius – ± 10 km;
- for the orbital period – ± 5 s;
- for the inclination – ± 5 arcmin.

ВВЕДЕНИЕ

Точность выведения космического аппарата (КА) на заданную орбиту и точность попадания головной части баллистической ракеты в цель являются одними из важнейших летно-технических характеристик ракет-носителей, так как они в значительной степени определяют эффективность боевых или космических ракетных комплексов. В связи с этим при разработке ракетно-космических комплексов точности выведения полезной нагрузки уделяется серьезное внимание и требование к этой характеристике постоянно ужесточается.

Отклонения фактических параметров траектории ракет-носителей от расчетных являются следствием возмущений, действующих на активном и пассивном участках траектории (разброс конструктивных параметров ракеты и двигательной установки, отклонения от номинала внешних условий полета, ошибки приборов системы управления и т. д.). Учитывая, что на активном участке траектории движение ракеты управляемое, отклонения параметров в момент выключения двигателя определяются в конечном итоге методической и инструментальной ошибками системы управления. С целью минимизации отмеченных ошибок современные ракеты-носители оснащены высокоточными системами управления на базе гиросtabilизированной платформы и бортовых вычислительных комплексов, реализующих «терминальные» методы наведения.

Оценка точностных характеристик ракет-носителей как научная дисциплина является одним из разделов динамики полета ракет и включает в себя совокупность наук, таких, как теоретическая механика, механика полета, теория гироскопов и инерциальных систем, теория колебаний, теория вероятностей и математическая статистика, геодезия, гравиметрия и др.

Вопросам оценки характеристик рассеивания головных частей баллистических ракет и точностных характеристик космических ракет-носителей посвящены работы многих авторов, в том числе Р. Ф. Аппазова, С. С. Лаврова, В. П. Мишина (1966), А. А. Лебедева, Н. Ф. Герасюты (1970), Р. Ф. Аппазова, О. Г. Сытина (1987), Н. Ф. Герасюты, А. В. Новикова, Н. Г. Белецкой (1998) и др.

Содержание настоящей книги отражает опыт разработки ракетных комплексов в КБ «Южное». Методология решения задач по оценке точностных характеристик ракет сформировалась благодаря усилиям ведущих ученых КБ «Южное», ЦНИИмаша, НПЦ автоматики и приборостроения, НИИ прикладной механики, НПП «Хартрон-Аркос», 4 ЦНИИ МО РФ.

Большой личный вклад в теорию и практику решения задач по обеспечению заданных точностных характеристик ракетных комплексов внесли ведущие ученые научной школы члена-корреспондента Академии наук Украины Н. Ф. Герасюты: доктор технических наук, профессор И. М. Игдалов, кандидаты технических наук В. В. Брикер, В. М. Морозов, Н. Е. Зыков, В. В. Горбунцов, ведущие специалисты С. В. Мартынцев, Р. С. Якупов, А. А. Лашенко, а также представители смежных организаций Я. М. Цуркис, Г. Н. Румянцев, В. И. Решетников, С. С. Корума, Г. И. Морозенко и др.

Точностные характеристики ракет-носителей в первую очередь оцениваются по результатам наземной (лабораторной, заводской и др.) отработки приборов системы управления. Учитывая невозможность полной имитации полета на Земле, необходимо дополнить результаты априорной оценки (до полета) материалами летных испытаний и штатных пусков ракет-носителей, получив, таким образом, более корректную оценку точности выведения.

Настоящая работа посвящена обзору методов априорной и апостериорной оценок точности выведения ракет-носителей с инерциальной системой управления. В качестве примера приведены опытно-теоретические характеристики точности выведения ракет-носителей «Зенит» и «Циклон», занимающих лидирующее место по точности выведения среди современных ракетно-космических комплексов.

Авторы благодарят доктора технических наук, профессора И. М. Игдалова, доктора технических наук, профессора В. И. Перлика, доктора технических наук, профессора А. И. Шевцова за ряд полезных замечаний, позволивших улучшить содержание книги, а также выражают свою признательность Н. П. Зыковой за огромную работу по подготовке рукописи к печати.

Монография адресована, в основном, специалистам, работающим в научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро ракетно-космической отрасли, и может быть полезна студентам старших курсов аэрокосмических вузов.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

- АУТ – активный участок траектории
БИНС – бесплатформенная инерциальная навигационная система
БЦВМ – бортовая цифровая вычислительная машина
ГСП – гиростабилизированная платформа
ДУ – двигательная установка
ИНС – инерциальная навигационная система
КА – космический аппарат
ЛА – летательный аппарат
МО – математическое ожидание
ОЧ – отделяющаяся часть
ПУТ – пассивный участок траектории
РБ – разгонный блок
РН – ракета-носитель
СВ – случайная величина
СК – система координат
АГСК – абсолютная геодезическая СК
НССК – начальная стартовая СК
ССК – связанная СК
СКО – среднее квадратичное отклонение
СУ – система управления
ц. м. – центр масс

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ БАЛЛИСТИКИ

1.1. Траектория полета ракеты-носителя

Под ракетой-носителем (РН) понимают управляемый летательный аппарат (ЛА), траектория которого есть пространственная кривая, описываемая в полете центром масс (ц. м.) ракеты. РН предназначены для выведения на заданные траектории полета космических аппаратов.

Различают два вида полета летательных аппаратов: программный (активный участок траектории – АУТ, рис. 1.1) и баллистический (пассивный участок траектории – ПУТ). Баллистическим полетом называется полет, основывающийся на принципе бросания и определяется в основном законами баллистики, аэродинамики и небесной механики. Программным полетом называется полет, основывающийся на принципе управления по определенной программе силами, действующими на летательный аппарат.

Ракета-носитель, начиная движение из точки старта, сначала совершает программный полет, во время которого она набирает кинетическую энергию

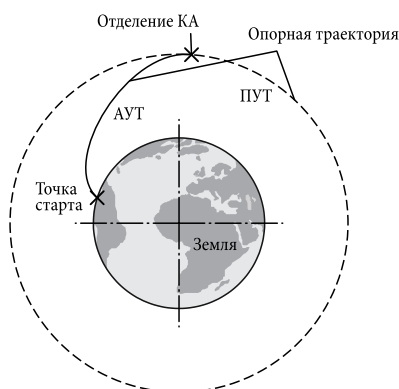


Рис. 1.1. Активный участок траектории полета летательных аппаратов

за счет работы двигательной установки (ДУ). При этом на ракету действуют сила притяжения Земли, сила тяги ДУ, аэродинамическая сила и силы, создаваемые органами управления. Все названные силы, кроме силы притяжения Земли, в полете могут быть изменены с помощью системы управления (СУ), за счет чего обеспечивается управление движением ракеты. Участок программного полета ракеты называют активным участком траектории. На участке активного полета летательный аппарат представляет собой сложную конструкцию, состоящую из ракеты-носителя, которая, в свою очередь, может быть многоступенчатой (состоять из нескольких частей – ступеней) и собственно космического аппарата. Запас потенциальной (высота полета) и кинетической (скорость полета) энергии КА, который в дальнейшем совершает полет по баллистической траектории, реализуется за счет сжигания топлива на РН. В конце активного участка траектории происходят выключение ДУ и отделение космического аппарата или головной части (для баллистических ракет), которые дальше совершают баллистический полет. Во время баллистического полета на КА действуют сила притяжения Земли и аэродинамическая сила. Движением КА во время баллистического полета чаще всего не управляют, поэтому участок баллистического полета называют пассивным участком траектории. Протяженность участка баллистического полета во много раз превосходит протяженность участка программного полета. Закон управления движением РН должен быть подчинен основному требованию – реализации необходимых скорости, высоты полета и других кинематических характеристик в начале пассивного полета при минимальном расходе топлива (включая требования минимального рассеивания ракеты относительно цели).

Движение РН обычно рассматривают в некоторой прямоугольной декартовой системе координат, связанной с Землей, и характеризуют параметрами движения. В качестве параметров движения могут быть три координаты: X , Y , Z , определяющие положение ц. м. ракеты в выбранной системе координат, и три составляющие вектора скорости ц. м.: V_x , V_y , V_z или в векторном виде – радиус-вектор \vec{R} и вектор скорости \vec{V} центра масс. Закон движения ракеты (траекторию) можно представить в виде функциональной зависимости радиуса-вектора ц. м. от времени полета $\vec{R}(t)$. Эта зависимость полностью определяется начальными условиями движения и системой сил, действующих на ракету в полете. Так как РН является достаточно сложным летательным аппаратом, запуск которого связан с большими материальными затратами, для изучения движения РН широко используются математические модели движения.

Основу математической модели движения составляют дифференциальные уравнения, описывающие движение ракеты. Конкретный вид математической модели определяется поставленной задачей исследования движения, в зависимости от которой выбирается механическая модель ракеты, модель условий полета, модель сил и моментов, приложенных к ракете, и т. д.

Необходимо отметить следующие специфические особенности ракеты как динамической системы.

Ракета вместе с системой управления образует замкнутую динамическую систему, процессы в которой (движение ракеты, упругие колебания ракеты и колебания жидкого топлива в баках, преобразования электрических сигналов, отклонения органов управления и др.) описываются сложной системой дифференциальных уравнений.

Можно рассматривать следующие составляющие движения ракеты:

- движения центра масс;
- движения вокруг центра масс;
- упругие колебания корпуса (изгибные колебания в двух плоскостях, продольные и крутильные колебания);
- колебания жидкого топлива в баках относительно корпуса ракеты при наличии свободных поверхностей топлива.

Считать ракету абсолютно твердой можно лишь в первом приближении. В общем же случае изгибные колебания корпуса ракеты могут взаимодействовать с колебаниями в системе управления и с колебаниями жидкого топлива. Когда частоты колебаний достаточно близки, при исследовании движения ракеты необходимо учитывать взаимосвязь соответствующих колебательных процессов.

Движение центра масс ракеты является неустановившимся, причем параметры ракеты и параметры ее движения весьма существенно изменяются в течение полета. Изменения параметров движения связаны с большим секундным расходом топлива и перемещением ракеты с переменной скоростью в атмосфере, плотность которой с высотой резко падает. В результате большого расхода топлива изменяются такие характеристики ракеты, как масса, моменты инерции и положение центра масс. Изменение высоты полета и плотности атмосферы в сочетании с резким изменением скорости движения ракеты приводят к весьма специфическому характеру изменения величины скоростного напора.

С изменением числа Маха изменяются и аэродинамические характеристики ракеты, в частности C_t – коэффициент тангенциальной силы, C_n^α – производная от коэффициента нормальной силы по углу атаки, \bar{x}_d – относительная координата центра давления. В связи с тем, что на последних секундах активного полета, как правило, двигательная установка переходит на режим малой тяги, на этом участке движения имеет место резкое изменение величины тяги и осевой перегрузки.

У многоступенчатых ракет, кроме указанных изменений непрерывного характера, имеют место также скачкообразные изменения параметров ракеты и

параметров движения, связанные с отделением отработавшей ступени (отделяющейся части – ОЧ) и началом работы двигательной установки следующей ступени.

Скачкообразные изменения параметров могут иметь место как в моменты разделения ступеней, так и в моменты отделения элементов конструкции ракеты, сбрасываемых после выхода ее из плотных слоев атмосферы (обтекатель головной части, элементы хвостового отсека и др.). В результате изменения параметров ракеты и параметров ее движения в процессе полета существенно изменяются динамические свойства ракеты как объекта управления (эффективность органов управления, реакция ракеты на отклонение органов управления и др.).

Система дифференциальных уравнений, достаточно полно описывающая полет управляемой ракеты, имеет очень высокий порядок и является нелинейной стохастической системой уравнений.

Подробно математические модели движения описаны в соответствующих работах по баллистике: (Лебедев, Герасюта 1970; Аппазов, Лавров, Мишин 1966; Герасюта, Новиков, Белецкая 1998; Аппазов, Сытин 1987; Дмитриевский и др. 1964) и др.

В настоящей работе приведена только одна из возможных видов математической модели движения ракеты, заимствованная из (Лебедев, Герасюта 1970).

Как отмечено в указанной работе, исследование полета ракеты может быть упрощено за счет удачного выбора системы координат. Практически всегда оказывается наиболее целесообразным получать уравнения вращательного движения объекта проектированием соответствующего векторного уравнения на связанные с объектом оси. Однако выбор системы координат для составления скалярных уравнений движения центра масс объекта во многом зависит от рассматриваемой задачи. Так, например, при исследовании управляемого движения ракеты на активном участке траектории целесообразно рассматривать движение относительно земных осей.

Оси этой системы $Ox_3y_3z_3$ (рис. 1.2) неподвижно связаны с Землей и участвуют в ее суточном вращении. Сокращенно их называют земными осями.

Начало системы координат O находится в точке старта; ось Oy_3 направлена по радиусу-вектору, проведенному из центра общего земного эллипсоида через точку старта; ось Ox_3 образует с плоскостью местного меридиана угол ψ , называемый азимутом запуска; ось Oz_3 направляется так, чтобы система координат была правой.

Уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на земные оси имеют вид:

$$m \frac{dV_{x_3}}{dt} = N_{x_3} + G_{x_3} - m j_{cx};$$

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV_{y_3}}{dt} &= N_{y_3} + G_{y_3} - m j_{cy}; \\
 m \frac{dV_{y_3}}{dt} &= N_{y_3} + G_{y_3} - m j_{cy};
 \end{aligned}
 \quad (1.1)$$

где $\bar{N} = \bar{R} + \bar{P}$ – вектор результирующей полной аэродинамической (\bar{R}) силы и силы тяги (\bar{P}); \bar{G} – вектор силы тяжести; \bar{j}_c – вектор кориолисова ускорения; m – масса ракеты; \bar{V}_3 – вектор скорости ц. м. ракеты.

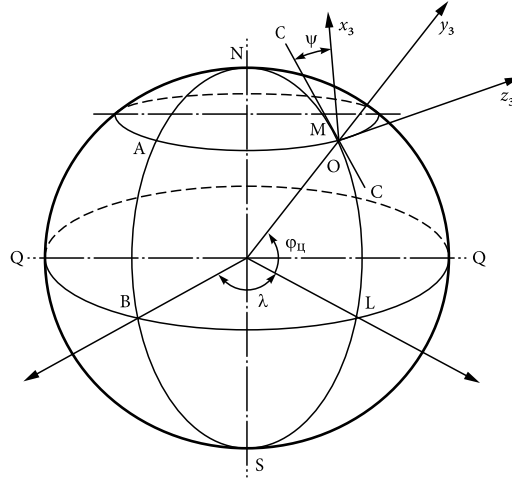


Рис. 1.2. Система координат: M – точка старта; NABS – начальный (Гринвичский) меридиан; NMLS – местный меридиан; $\varphi_{ц}$ – геоцентрическая широта точки M ; λ – долгота точки M ; CC – касательная к местному меридиану в точке M ; ψ – азимут запуска

Кинематические уравнения движения центра масс ракеты в проекциях на оси земной системы координат:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_3}{dt} &= V_{x_3}; \\
 \frac{dy_3}{dt} &= V_{y_3}; \\
 \frac{dz_3}{dt} &= V_{z_3},
 \end{aligned}
 \quad (1.2)$$

где x_3, y_3, z_3 – проекции радиуса-вектора ц. м. ракеты.

Динамические уравнения Эйлера

$$\begin{aligned}
 J_{x1} \frac{d\omega_{x1}}{dt} + (J_{z1} - J_{y1}) \omega_{y1} \omega_{z1} &= \sum M_{x1}; \\
 J_{y1} \frac{d\omega_{y1}}{dt} + (J_{x1} - J_{z1}) \omega_{x1} \omega_{z1} &= \sum M_{y1}; \\
 J_{z1} \frac{d\omega_{z1}}{dt} + (J_{y1} - J_{x1}) \omega_{y1} \omega_{x1} &= \sum M_{z1},
 \end{aligned}
 \quad (1.3)$$

где J_{x1}, J_{y1}, J_{z1} – моменты инерции РН относительно связанных осей; $\omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$ – проекции угловой скорости ракеты $\bar{\omega}$ на связанные с ней оси; M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} – проекции вектора момента сил \bar{M} , действующего на ракету на оси связанной системы координат.

Проекции угловой скорости ракеты на оси связанной системы координат:

$$\begin{aligned}\omega_{x1} &= \frac{d\gamma_1}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} \sin \upsilon_1; \\ \omega_{y1} &= \frac{d\psi_1}{dt} \cos \upsilon_1 \cos \gamma_1 + \frac{d\upsilon_1}{dt} \sin \gamma_1; \\ \omega_{z1} &= \frac{d\upsilon_1}{dt} \cos \gamma_1 - \frac{d\psi_1}{dt} \cos \upsilon_1 \sin \gamma_1.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1)–(1.4) может использоваться для описания движения неуправляемой ракеты, но для управляемой ракеты она еще не замкнута. Дело в том, что неуправляемая ракета как твердое тело имеет шесть степеней свободы. Соответственно этому ее движение описывается системой 12 дифференциальных уравнений первого порядка, которая является замкнутой, так как силы P, X_1, Y_1, Z_1 , действующие на ракету, и их моменты M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} относительно связанных осей однозначно определяются параметрами движения ракеты и число неизвестных функций

$$x_3, y_3, z_3, V_{x3}, V_{y3}, V_{z3}, \upsilon_1, \psi_1, \gamma_1, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}$$

равно числу дифференциальных уравнений. При этом, если отсутствуют случайные возмущения, траектория полета полностью определяется начальными условиями – значениями кинематических параметров движения в начальный момент времени

$$x_3(t_0), y_3(t_0), z_3(t_0), \dots, \omega_{z1}(t_0).$$

Управляемая ракета, если пренебречь ее упругостью и рассматривать ее как механическую систему, обладает в общем случае уже 12 степенями свободы: шесть степеней свободы для движения центра масс и вращения вокруг центра масс и шесть степеней свободы соответствующих органов управления. В частности, если управляющие нормальные силы создаются вращением ракеты вокруг двух осей, ракета имеет четыре органа управления: органы управления вращательными движениями тангажа, рыскания и крена и тягой двигателя. Система из 12 дифференциальных уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) при этом не является замкнутой, так как проекции сил и моментов, входящие в правые части уравнений, зависят от перемещений органов управления движениями тангажа δ_{υ_1} , рыскания δ_{ψ_1} , крена δ_{γ_1} и тягой двигателя δ_P .

Если помимо начальных условий задать изменение во времени величин $\delta_{\upsilon_1}(t), \delta_{\psi_1}(t), \delta_{\gamma_1}(t), \delta_P(t)$, то тем самым будет определена траектория ра-

кеты. В реальном полете перемещения органов управления осуществляются системой управления в зависимости от выполняемой задачи полета. Чтобы задача определения траектории полета стала осуществимой, необходимо к рассмотренной системе уравнений движения ракеты добавить уравнения, описывающие процессы в системе управления и связывающие перемещения органов управления с параметрами движения ракеты. Эти уравнения могут иметь совершенно разный конкретный вид в зависимости от принципа работы и устройства системы управления.

В самом общем виде уравнения системы управления можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 \left[\delta_{v_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t) \right] &= 0; \\ F_2 \left[\delta_{\gamma_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t) \right] &= 0; \\ F_3 \left[\delta_{\psi_1}(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t) \right] &= 0; \\ F_4 \left[\delta_p(t), x_e(t), y_e(t), z_e(t), v_1(t), \psi_1(t), \gamma_1(t) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где F_1, F_2, F_3 и F_4 – функционалы от функций, взятых в квадратные скобки.

Шестнадцать уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) составляют теперь замкнутую систему, определяющую 16 неизвестных функций

$$x_3, y_3, z_3, V_{x_3}, V_{y_3}, V_{z_3}, \omega_{x1}, \omega_{y1}, \omega_{z1}, v_1, \psi_1, \gamma_1, \delta_{v_1}, \delta_{\psi_1}, \delta_{\gamma_1}, \delta_p.$$

При этом траектория управляемого полета (решение системы) определяется заданием начальных условий и конкретных связей (1.5), накладываемых на движение ракеты системой управления.

В зависимости от решаемой задачи полученные выше общие уравнения движения могут быть более или менее существенно упрощены.

В первую очередь при составлении уравнений движения приходится учитывать, какой участок траектории рассматривается.

На активном участке траектории движение ракеты должно рассматриваться с учетом управления. Так как в большинстве случаев исследуется полет ракеты относительно Земли, а система управления ракетой является обычно инерциальной, приходится рассматривать движение центра масс в земных осях координат, а ориентацию ракеты – в инерциальных, т. е. начальных стартовых осях. Это обстоятельство приводит к возможности использования более или менее упрощенных уравнений, основанных на общих уравнениях, рассмотренных ранее.

При рассмотрении движения на участке свободного полета за пределами атмосферы исследование траектории облегчается отсутствием силы тяги, аэродинамических сил и сил, создаваемых органами управления, а также моментов всех этих сил. Однако вследствие большой дальности, высоты и скорости

полета приходится учитывать изменение ускорения земного притяжения и влияние вращения Земли.

На участке снижения головной части в атмосфере большую роль играют аэродинамические силы и моменты. Поскольку полет на этом участке является неуправляемым, нет необходимости опираться на инерциальную систему координат и для исследования можно использовать различные упрощения уравнений движения в проекциях на полускоростные оси.

1.2. Полет космического аппарата

Пусть в пространстве имеется изолированная система двух тел P_0 и P с массами m_0 и m и пусть эти тела притягиваются друг к другу как материальные точки согласно закону всемирного тяготения Ньютона (это строго справедливо для тел сферической структуры и приближенно – для тел, размеры которых малы по сравнению с разделяющим их расстоянием). Требуется изучить движение одного тела относительно другого. Движение, получаемое на основе задачи двух тел, называется невозмущенным кеплеровским движением.

Возьмем абсолютную систему координат $O\xi\eta\zeta$ и обозначим через ξ_0, η_0, ζ_0 координаты центра масс тела P_0 , а через ξ, η, ζ – координаты центра масс тела P . Тогда дифференциальные уравнения движения тел P_0 и P запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= f_m \frac{\xi - \xi_0}{r^3}; & \frac{d^2\xi}{dt^2} &= f_{m_0} \frac{\xi_0 - \xi}{r^3}, \\ \frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= f_m \frac{\eta - \eta_0}{r^3}; & \frac{d^2\eta}{dt^2} &= f_{m_0} \frac{\eta_0 - \eta}{r^3}, \\ \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= f_m \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3}; & \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= f_{m_0} \frac{\zeta_0 - \zeta}{r^3},\end{aligned}$$

где f – постоянная тяготения, а

$$r = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2}$$

есть расстояние между телами P и P_0 .

Абсолютная система координат на практике не является удобной. Поэтому приходится пользоваться другими системами координат.

Возьмем прямоугольную систему координат P_0xyz с началом в центре масс тела P_0 , с осями P_0x, P_0y, P_0z , соответственно параллельными $O\xi, O\eta, O\zeta$. Тогда формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 + x, \\ \eta &= \eta_0 + y, \\ \zeta &= \zeta_0 + z.\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения относительного движения тела P запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\mu \frac{x}{r^3}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mu \frac{y}{r^3}; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\mu \frac{z}{r^3}, \\ \mu &= f(m_0 + m), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Эти дифференциальные уравнения описывают невозмущенное кеплеровское движение планеты относительно Солнца, невозмущенное движение спутника относительно планеты, невозмущенное движение искусственного спутника (КА) относительно Земли и т. д.

Интеграл энергий

В векторной записи уравнения (1.6) имеют вид

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}.\tag{1.7}$$

Умножив это уравнение скалярно на $2\dot{\vec{r}}$,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \cdot 2\dot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot 2\dot{\vec{r}},$$

после преобразований и интегрирования получим

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h,$$

где h – постоянная интегрирования.

Это уравнение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\frac{mV^2}{2} - m\frac{\mu}{r} &= \frac{mh}{2} \\ \text{или } T + U &= h,\end{aligned}\tag{1.8}$$

где T – кинетическая энергия; U – потенциальная энергия; h – константа.

Таким образом, первый интеграл (1.8) выражает закон сохранения энергии, поэтому он называется интегралом энергии, а постоянная интегрирования h – постоянной энергий. Из интеграла энергий можно сделать некоторые заключения о характере невозмущенного движения:

– из интеграла энергий, записанного в виде

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = \text{const},$$

следует, что при увеличении расстояния r от притягивающего центра, скорость КА уменьшается и наоборот.

- Скорость КА не может быть мнимой, поэтому $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h \geq 0$. Значит, если $h > 0$, то радиус-вектор КА может возрасти неограниченно, если же $h < 0$, то КА в своем движении не выходит за пределы сферы с радиусом $r = \frac{2\mu}{h}$. Эта сфера называется поверхностью нулевой скорости (рис. 1.3).
- Если $r \rightarrow \infty$, то $V^2 \rightarrow h$, т. е. скорость КА при удалении от притягивающего центра на бесконечное расстояние будет составлять

$$V_{\infty} = \sqrt{h}.$$

Эту скорость называют скоростью на бесконечности.

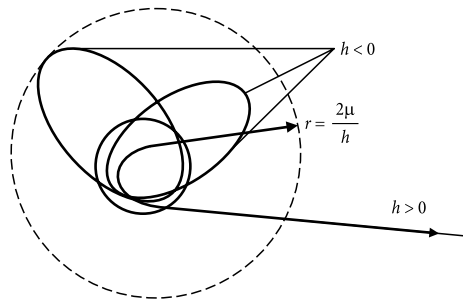


Рис. 1.3. Поверхность нулевой скорости

Интеграл площадей

Второй интеграл системы получается посредством аналогичных преобразований. Умножим исходное векторное уравнение (1.7) на $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2} + \bar{\mathbf{r}} \times \frac{\mu}{r^3} \cdot \bar{\mathbf{r}} = 0.$$

После преобразований получим

$$\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = 0.$$

После интегрирования будем иметь

$$\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{C}},$$

где $\bar{\mathbf{C}}$ – постоянная интегрирования. Это уравнение – интеграл системы, называемый интегралом площадей, $\bar{\mathbf{C}}$ – постоянный вектор с компонентами C_1, C_2, C_3 . Постоянная $\bar{\mathbf{C}}$ называется постоянной площадей.

Для выяснения характера движения умножим это уравнение скалярно на $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{C}}.$$

В связи с тем, что $\bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}}) = 0$, $\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 0$ или в проекциях на оси инерциальной системы координат

$$C_1 X + C_2 Y + C_3 Z = 0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Следовательно, невозмущенное движение КА происходит в неизменной плоскости, причем вектор $\bar{\mathbf{C}}$ все время ей перпендикулярен. Постоянная площадей $\bar{\mathbf{C}}$ определяет положение плоскости орбиты в пространстве. Поскольку это справедливо для любого момента времени, в том числе и для начального, плоскость орбиты будет проходить также через вектор начальной скорости КА. Таким образом, согласно закону площадей невозмущенное движение КА происходит в плоскости, проходящей через вектор начальной скорости и центр тяготения (рис. 1.4).

Произведение $(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{V}})$ есть не что иное, как кинетический момент КА, поэтому интеграл площадей выражает закон сохранения кинетического момента.

Интеграл Лапласа

Существует еще один первый интеграл системы дифференциальных уравнений задачи двух тел – интеграл Лапласа:

$$-\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}}{r} + (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}) = \bar{\mathbf{f}}, \quad (1.9)$$

где $\bar{\mathbf{f}}$ – постоянный вектор (постоянная интегрирования), имеющий компоненты f_1, f_2, f_3 . Определим его направление. Для этого умножим выражение (1.9) скалярно на $\bar{\mathbf{C}}$:

$$\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}) - \frac{\mu}{r} \bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{r}}.$$

Оба слагаемых в правой части уравнения равны нулю, так как представляют скалярные произведения взаимно перпендикулярных векторов. Значит, $\bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{f}} = 0$ или в координатной форме

$$C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 = 0.$$

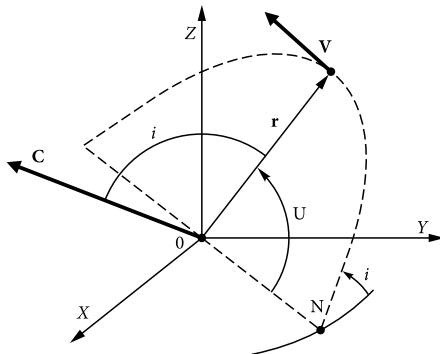


Рис. 1.4

Следовательно, вектор $\bar{\mathbf{f}}$ перпендикулярен вектору $\bar{\mathbf{C}}$, т. е. лежит в плоскости орбиты.

Уравнение орбиты

Выведем уравнение траектории движения КА, для чего введем полярную систему координат r, ϑ . Положение КА будем определять радиусом-вектором \mathbf{r} (расстоянием от КА до центра притяжения) и полярным углом ϑ между радиусом-вектором \mathbf{r} и некоторым фиксированным направлением в плоскости орбиты, за которое примем вектор Лапласа (рис. 1.5).

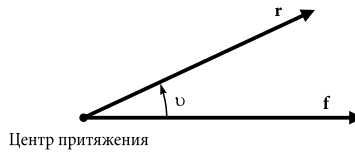


Рис. 1.5

Умножим выражение для интеграла Лапласа (1.9) скалярно на $\bar{\mathbf{r}}$:

$$\bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\bar{\mathbf{r}}^2}{r} + \bar{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{C}}).$$

Преобразовывая в соответствии с правилами умножения векторов, получим

$$f \cdot r \cdot \cos(\vartheta) = -\mu \cdot r + C^2.$$

Выразив координату r в зависимости от координаты ϑ и констант, получим

$$r = \frac{C^2 / \mu}{1 + (f / \mu) \cdot \cos(\vartheta)}.$$

Обозначим

$$\frac{C^2}{\mu} = p, \quad \frac{f}{\mu} = e.$$

Получим уравнение орбиты КА в полярных координатах (r, ϑ)

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\vartheta)}.$$

Это есть уравнение конического сечения, т. е. кривой второго порядка, образующейся от пересечения поверхностей прямого кругового конуса с плоскостью, в полярных координатах. Вид конического сечения зависит от угла наклона секущей плоскости к оси конуса. Это может быть окружность, эллипс, парабола, гипербола (рис. 1.6).

Полученное уравнение орбиты выражает собой первый закон Кеплера: орбита тела, движущегося в центральном поле тяготения, есть коническое сечение, в одном из фокусов которого находится центральное тело. Параметры

e и p – это эксцентриситет и фокальный параметр орбиты. Они определяют форму и размеры орбиты:

- $e = 0$ – окружность;
- $0 < e < 1$ – эллипс;
- $e = 1$ – парабола;
- $e > 1$ – гипербола.

Орбита невозмущенного движения представляет собой коническое сечение, для однозначного определения которого необходимы шесть элементов, а именно (рис. 1.7):

- наклонение i и долгота восходящего узла Ω , задающие ориентацию плоскости орбиты;
- длина большой полуоси a и эксцентриситет e , определяющие геометрию орбиты (размеры и форму орбиты);
- аргумент перицентра ω и время прохождения через перицентр τ_p , фиксирующие положение орбиты в ее плоскости и положение КА на орбите.

Алгоритм расчета параметров орбиты представлен в разделе 1.3.

Плоскость орбиты спутника, движущегося в центральном поле, пересекает плоскость экватора вдоль линии узлов $O\Omega$.

Точка, в которой спутник пересекает плоскость экватора при движении с юга на север, называется восходящим узлом. Угол между направлением на точку весеннего равноденствия и линией узлов (угол $XO\Omega$) называется прямым восхождением или **долготой восходящего узла** и обозначается Ω . Угол между касательной к орбите в восходящем узле в направлении движения тела и касательной к экватору в направлении оси OY называется **наклоением плоскости**

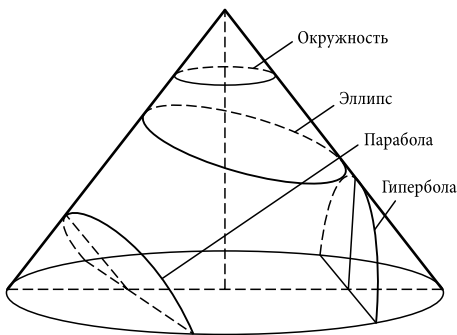


Рис. 1.6. Виды конического сечения

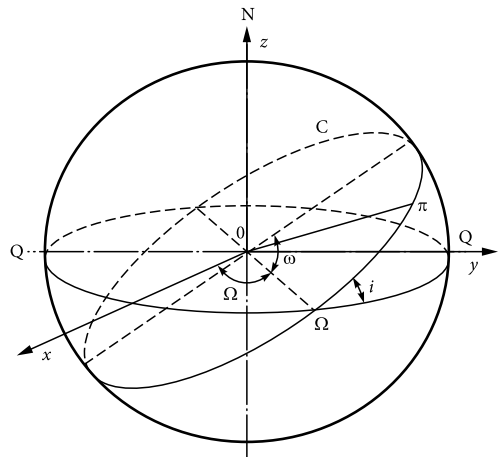


Рис. 1.7. Элементы эллиптической орбиты

орбиты и обозначается через i . Угол i изменяется от 0° до 180° . Угол Ω ОП, отсчитываемый в направлении движения по орбите, определяет положение перигея Π и обозначается как ω .

Таким образом

- **долгота восходящего узла Ω** – угол, отсчитываемый в плоскости экватора против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса, от направления в точку весеннего равноденствия до направления в восходящий узел орбиты. Этот угол может изменяться в диапазоне $0 \leq \Omega \leq 360^\circ$;
- **наклонение орбиты к плоскости земного экватора** – угол, отсчитываемый против часовой стрелки, если смотреть со стороны восходящего узла, от плоскости экватора до плоскости орбиты. Этот угол может находиться в пределах $0 \leq i \leq 180^\circ$. При $i = 0^\circ$ и $i = 180^\circ$ орбита называется экваториальной (плоскость орбиты совпадает с плоскостью экватора);
- **аргумент перигея ω** – угол, отсчитываемый в плоскости орбиты по направлению движения от направления в восходящий узел до направления в перигей. Аргумент перигея изменяется в пределах $0 \leq \omega \leq 360^\circ$.

Для экваториальных орбит, когда $i = 0$, положение восходящего узла становится неопределенным. По мере приближения к круговым орбитам ($e < 0,0005$) становится неопределенным и положение перигея. Здесь под неопределенностью величины ω мы подразумеваем не математическую неопределенность, которая имеет место лишь для точно круговой орбиты, а практическую неопределенность, связанную с большим влиянием неизбежных ошибок измерения и вычисления на точность определения положения перигея. В этом случае для определения ориентации орбиты в ее плоскости вводят понятие **долготы перицентра Π** как суммы двух углов Ω и ω ($\Pi = \omega + \Omega$), измеряемой от постоянного направления в пространстве.

Заметим, что некоторые из указанных элементов орбиты могут быть заменены другими равноценными им элементами: высоты апогея H_a и перигея H_{Π} – для эллиптических орбит; высота H_{\max} – для круговых орбит; период обращения T ; направление нормали к плоскости орбиты γ ; долгота перицентра L_{Π} ; фокальный параметр орбиты p и т. п.

Высоты определяются относительно среднего радиуса Земли $R_{cp} = 6378,14$ км. При этом под отклонением высоты ΔH_{\max} понимается максимальное (по модулю) отклонение от расчетного радиуса-вектора положения КА на орбите из вычисленных в двенадцати точках, равномерно расположенных через 30° углового положения КА, начиная от расчетного в точке выведения, т. е. в отклонение высоты включается составляющая за счет смещения перицентра орбиты.

Для приэкваториальных орбит разброс долготы перицентра ΔL_{Π} ($L_{\Pi} = \omega + \Omega$) эквивалентен разбросу аргумента перигея $\Delta \omega$, отсчитываемому от расчетного положения перигея в номинальной плоскости орбиты.

Поскольку положение перигея на круговой орбите ($e = 0$) или положение линии узлов при совпадении фиксированной и орбитальной плоскостей ($i = 0$) не определены, то область применимости описанной системы орбитальных параметров ограничена.

На практике часто параметры орбиты рассчитываются в орбитальной прямоугольной системе координат *Onrv*: начало – в центре масс КА; ось «*v*» – перпендикулярна плоскости орбиты и вектору интеграла площадей \vec{c} ; ось «*r*» – направлена по радиусу-вектору ц. м. КА в сторону его возрастания; ось «*n*» – дополняет систему до правой.

1.3. Соприкасающиеся орбиты

На движение космического аппарата оказывают влияние силы притяжения к Солнцу и Луне, сопротивление атмосферы, солнечного давления и т. п. Кроме того, гравитационное поле Земли в действительности не является полем центральной силы из-за несферичности Земли и неравномерности распределения масс внутри нее.

В результате действия этих сил фактическая орбита является не коническим сечением (эллипсом), а сложной пространственной кривой. Поэтому задача исследования возмущенного движения КА достаточно сложна. На практике эта задача заменена задачей изучения возмущенного оскулирующего движения.

Согласно идее этого метода можно считать, что небесное тело (или КА) всегда движется по коническому сечению, но такому, которое изменяется в каждый момент времени. Другими словами, решение задачи возмущенного движения определяется теми же шестью первыми интегралами, что и решение задачи невозмущенного движения, но элементы орбиты Ω , i , ω , p , e , r рассматриваются не как постоянные, а как некоторые функции времени: $i = i(t)$, $r = r(t)$ и т. д.

Элементы орбиты должны быть определены так, чтобы уравнения возмущенного движения удовлетворялись.

С точки зрения механики сущность такого метода состоит в замене реальной возмущенной траектории движения КА множеством орбит (траекторий невозмущенного движения), которые в каждый момент времени соприкасаются с реальной траекторией.

Реальная траектория является огибающей семейства орбит невозмущенного движения. В астрономии соприкасающиеся кривые носят название оскулирующих, поэтому указанные выше траектории невозмущенного движения называют оскулирующими орбитами, а их элементы – оскулирующими элементами.

Пусть на тело, движущееся по кеплеровой орбите C_0 (рис. 1.8), элементы которой однозначно определены начальными условиями, в точке P_1 подействовала возмущающая сила. Будем считать действие силы импульсным, т. е. мгновенным.

Положение точки P_1 , новое направление и величина скорости определяют новое коническое сечение C_1 , по которому тело будет двигаться до тех пор, пока оно снова не будет возмущено какой-нибудь внешней силой. Пусть это будет точка P_2 , в которой тело перейдет на новое коническое сечение C_2 . Если это будет продолжаться до бесконечности, то тело будет двигаться по коническим сечениям, время от времени изменяющимся под действием возмущающих сил.

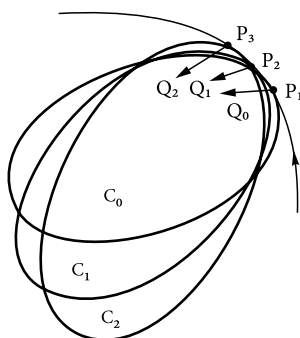


Рис. 1.8

В пределе импульсы переходят в непрерывную возмущающую силу, и орбита становится коническим сечением, все элементы которого непрерывно изменяются.

Таким образом, оскулирующая орбита определяется как орбита, элементарная дуга которой совпадает с элементарной дугой действительной орбиты. Время, за которое тело проходит эту элементарную дугу, называется эпохой соприкосновения (оскуляции). В течение отдельной эпохи соприкосновения соответствующее оскулирующее коническое сечение можно использовать для определения положения и скорости тела с достаточной степенью точности. Если бы во время данной эпохи соприкосновения возмущающая сила исчезла, то оскулирующее коническое сечение представляло бы с этого момента точную орбиту тела. Отклонения оскулирующих элементов от их значений в невозмущенном движении (в начальный момент) называются возмущениями элементов орбит.

Возмущения делятся на периодические (являющиеся периодическими функциями времени) и вековые (монотонно нарастающие со временем).

Расчет оскулирующих параметров орбиты по одномоментным измерениям радиуса-вектора и вектора скорости проводится в следующей последовательности.

Определяется вектор площадей

$$\bar{\sigma} = [\bar{r}_1 \times \bar{V}_1]$$

и единичный вектор внешней нормали

$$\bar{\sigma}^0 = \frac{\bar{\sigma}}{|\bar{\sigma}|} = [\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0].$$

Учитывая, что

$$\bar{\sigma}^0 = [\sin(\Omega) \cdot \sin(i), -\cos(\Omega) \cdot \sin(i), \cos(i)],$$

определяется гринвичская долгота восходящего узла Ω и наклонение плоскости орбиты i :

$$i = \arccos(\sigma_z^0) = \arccos\left(\frac{x_1 V_{1y} - y_1 V_{1x}}{[\bar{r}_1 \cdot \bar{V}_1]}\right);$$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin(i)}\right), & \text{если } \sigma_z^0 > 0; \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{-\sigma_y^0}{\sin(i)}\right), & \text{если } \sigma_z^0 < 0. \end{cases}$$

Рассчитывается фокальный параметр орбиты

$$p = \frac{|\bar{\sigma}|^2}{\mu},$$

эксцентриситет орбиты

$$e = \sqrt{1 + \left(V_1^2 - \frac{2\mu}{r_1}\right) \cdot \frac{|\bar{\sigma}|^2}{\mu^2}}$$

и истинная аномалия

$$v = \begin{cases} \arccos\left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{e}, & \text{если } (\bar{r}_1, \bar{V}_1) \geq 0; \\ -\arccos\left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \cdot \frac{1}{e}, & \text{если } (\bar{r}_1, \bar{V}_1) < 0. \end{cases}$$

Определяется аргумент широты КА

$$u = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_1}{r_1} \cos \Omega + \frac{y_1}{r_1} \sin \Omega\right), & \text{если } \text{sign}\left(\frac{z_1}{r_1} \sin \Omega\right) = \text{sign}(y_1 V_{1z} - z_1 V_{1y}); \\ -\arccos\left(\frac{x_1}{r_1} \cos \Omega + \frac{y_1}{r_1} \sin \Omega\right), & \text{если } \text{sign}\left(\frac{z_1}{r_1} \sin \Omega\right) = -\text{sign}(y_1 V_{1z} - z_1 V_{1y}) \end{cases}$$

и аргумент перицентра

$$\omega = u_1 - v_1.$$

- Определим величину большой полуоси $a = \frac{p}{1-e^2}$,
- оскулирующий период обращения КА $T_{\text{оск}} = 2\pi \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$,
 - радиус-вектор апоцентра орбиты $r_a = \frac{p}{1-e}$,
 - радиус-вектор перицентра орбиты $r_p = \frac{p}{1+e}$.

При необходимости другие параметры оскулирующей орбиты могут быть рассчитаны с использованием зависимостей, приведенных в (Авдеев и др. 1990).

Глава 2

УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТОМ

На систему управления любым подвижным объектом возлагаются три основные функции:

- функция получения навигационно-измерительной информации;
- функция наведения, заключающаяся в программировании движения объекта управления и выработке разовых команд наведения из условия достижения конечной цели управления;
- функция стабилизации движения, заключающаяся в отработке программ управления, сформированных в ходе решения задачи наведения, и в обеспечении устойчивости движения в условиях действия на объект управления комплекса внешних и внутренних возмущений.

В соответствии с перечисленными функциями система управления подвижным объектом может быть разделена на три взаимосвязанные функциональные подсистемы:

- навигационно-измерительную систему,
- систему наведения,
- систему стабилизации движения.

Подвижный объект управления является сложным многоконтурным и многофункциональным объектом, который описывается большим числом параметров состояния и имеет несколько независимых параметров управления. Сигналы информации и управления в такой системе управления являются многомерными и включают несколько независимых компонент.

Поскольку в такой системе имеется несколько замкнутых контуров управления, данная система является многоконтурной, причем, ввиду того, что между отдельными контурами существуют перекрестные связи, возможно вредное влияние одних контуров управления на другие, что может ухудшить качество системы управления в целом или даже сделать ее неработоспособной.

Идея принципа независимого (развязанного) управления была впервые выдвинута советским ученым И. Вознесенским. Суть названного принципа

состоит в том, что систему управления сложным многосвязным объектом со многими параметрами управления следует по возможности строить в виде совокупности независимых подсистем, каждая из которых имеет меньшее число параметров управления (желательно единственный) и не оказывает влияния на функционирование смежных подсистем. Данное обстоятельство упрощает, как правило, задачу синтеза системы управления в целом и повышает ее качество по таким показателям, как запасы устойчивости, точность и быстродействие.

Принцип независимого управления может быть реализован на практике не всегда, а только в тех случаях, когда для этого имеются необходимые предпосылки как в части динамических свойств объекта управления, так и по содержанию самих задач управления. При построении систем управления полетом такие предпосылки чаще всего возникают благодаря возможности представления движения РН в виде суперпозиции (независимого сложения) нескольких более простых движений. Так, принятый в механике фундаментальный подход к описанию движения твердого тела, в соответствии с которым сложное вращательно-поступательное движение тела представляется как комбинация поступательного движения его центра масс и вращения тела вокруг центра масс (при этом во многих случаях эти движения либо слабо влияют друг на друга, либо даже полностью независимы), позволяет разделять задачу управления полетом на задачу управления поступательным движением РН и задачу управления его вращательным движением.

Далее движение центра масс тела можно при определенных условиях разделить на три движения в трех взаимно перпендикулярных плоскостях – продольной, боковой и поперечной. При малых отклонениях движения центра масс РН от программной траектории эти три движения оказываются практически независимыми, что, в частности, позволяет строить систему стабилизации движения центра масс в виде трех независимых каналов продольной, боковой и нормальной стабилизации. Аналогичным образом в случае малости отклонений параметров ориентации РН (например, углов Эйлера) от их программных значений вращательное движение РН можно разделить на три практически независимых вращения вокруг соответствующих осей. Это обстоятельство позволяет построить систему угловой стабилизации ЛА (решающую задачу обеспечения вращательного движения ЛА по заданной программе) в виде трех независимых каналов.

2.1. Навигация

Инерциальные навигационные системы (ИНС) – устройства, предназначенные для определения параметров движения различных объектов (летательных аппаратов, надводных и подводных судов и др.). Эти системы находят чрезвычайно широкое применение. Информация, выдаваемая ими, используется как для реализации программы траекторного движения, так и для управления ориентацией объекта.

ИНС имеют по сравнению с другими навигационными системами важные преимущества – универсальность применения, возможность определения основных параметров движения (координат, скорости, ускорения, направления движения, пространственной ориентации и др.), автономность действия, помехозащищенность, высокая точность при ограничении времени работы.

ИНС присущи и определенные недостатки, главными из которых являются:

- возрастание погрешностей с течением времени, что ограничивает возможность использования во времени без применения корректирующих средств;
- сложность устройства и необходимость применения высокоточных базовых измерительных элементов и вычислительных устройств;
- высокая стоимость в эксплуатации: для их обслуживания (отладка, проверка, ремонт) требуется высококвалифицированный инженерно-технический состав и соответствующее оборудование.

В начальном периоде обозначились два направления построения инерциальных систем определения навигационных параметров.

Предложения первого направления относились к использованию гироскопических указателей и стабилизаторов для определения направлений в пространстве (направления меридиана и вертикали) и для гироскопической ориентации (определения координат местоположения).

Предложения второго направления основывались на использовании акселерометров с определенным ориентированием их измерительных осей в плоскости горизонта и интегрировании их показаний с целью определения скорости и координат местоположения объекта.

Первой реализацией инерциального метода определения направления в пространстве можно считать создание Г. Аншютцем-Кемпфе (1908 г., Германия) и Элмером А. Сперри (1911 г., США) корабельных гирокомпасов. Работы М. Шулера (Австрия), в которых он поставил условия невозмущаемости горизонтальными ускорениями гирокомпаса (1910 г.), физического и гироскопического маятников (1923 г.) в движении основания по дуге неподвижного большого круга, были следующим важнейшим достижением. Было показано, что при выполнении условия невозмущаемости для маятни-

ков последние обладают периодом нулевого спутника (84,4 мин). Весьма важным для последующего развития инерциальных систем был предложенный С. А. Ноздровским (1924 г., СССР) принцип силовой гироскопической стабилизации.

Первоначальная идея использования акселерометров в своем развитии прошла ряд ступеней пока не стала составной частью более общей идеи построения основного уравнения инерциального метода определения движения и его решения. По существу первоначальная идея сводилась к простейшему «естественному» способу определения пройденного пути (координат) посредством интегрирования показаний акселерометров при выполнении определенных ограничений ориентирования триэдра измерительных осей и гипотетических условий в отношении формы и гравитационного поля Земли. Простота и естественность способа заключается в известном представлении о том, что интеграл ускорения дает скорость, а второй интеграл – пройденный путь. Интегрирование показаний акселерометра при выполнении определенных условий представляет собой решение уравнения динамики точки, т. е. дифференциального уравнения движения центра масс объекта в проекции на определенное направление (ось). Это направление характеризуется двумя важными положениями. Первое – направление в выбранной плоскости движения объекта должно быть неизменным, т. е. абсолютная угловая скорость вращения этого направления в данной плоскости равна нулю. Второе – направление должно быть перпендикулярно вектору напряженности поля тяготения. Только при выполнении таких условий интегрирование показаний акселерометра дает значения скорости и пройденного пути в данном направлении без методических погрешностей.

Первый примитивный прибор, предназначенный для определения скорости и пути, был предложен Р. Вуссовым (1905 г.). Устройство состояло из свободного некорректируемого трехстепенного гироскопа с вертикальной осью собственного вращения, на котором устанавливался акселерометр с горизонтальным расположением измерительной оси. К выходу акселерометра последовательно подсоединялись два интегратора, соответственно выдающие сигналы, пропорциональные скорости и пройденному пути. Функционирование такой системы без методических погрешностей возможно в предположении плоской невращающейся Земли с нормальным гравитационным полем и при отсутствии вращения измерительных осей в плоскости горизонта. Только в таких условиях интегрирование показаний акселерометра будет определять собой решение дифференциального уравнения движения ц. м. объекта и соответствовать значению скорости и пройденному пути.

Практически одновременно с Р. Вуссовым была запатентована идея американского М. Керри (1903 г.) и русского В. В. Алексеева (1911 г.) изобре-

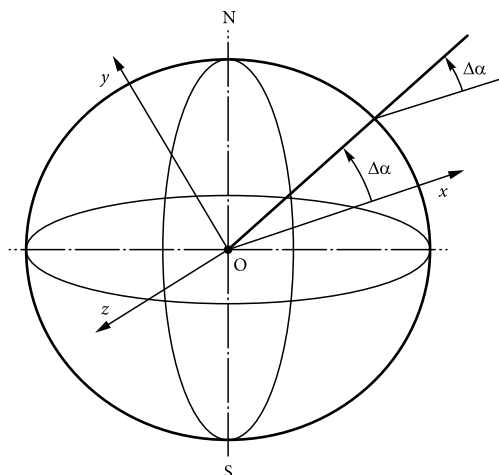


Рис. 2.1. Движение объекта по меридиану земного шара на север

тателей инерциальных систем геометрического типа, которые должны обеспечивать определение координат объекта, движущегося по поверхности вращающегося земного шара. Для объяснения принципа работы инерциальных систем геометрического типа рассмотрим подвижный объект, на борту которого имеется идеальный свободный гироскоп. Этот гироскоп может абсолютно точно «запомнить» направление местной вертикали в момент начала движения объекта. Для простоты рассмотрим случай, когда объект движется по меридиану земного шара на север (рис. 2.1).

Пусть кроме свободного гироскопа на борту объекта находится маятник, абсолютно точно указывающий направление местной вертикали. Измеряя угол $\Delta\alpha$ между осями вращения свободного гироскопа и маятника и умножая этот угол на радиус Земли R , можно получить путь, пройденный объектом: $s = R\Delta\alpha$. Эта формула позволяет сразу оценить требования к точности гироскопов, используемых в системах инерциальной навигации: ошибка в одну угловую минуту приводит к ошибке в одну морскую милю ($1852 \text{ м} = 1 \text{ угл. мин}$ дуги меридиана) на поверхности Земли.

Не намного сложнее устроен алгоритм определения пути при движении объекта по параллели. На борт объекта нужно взять хронометр, который достаточно точно измеряет время t движения объекта. Из значения угла $\Delta\alpha$ надо вычесть (добавить) значение угла поворота местной вертикали, вызванного вращением Земли и равного $\omega_z t$, где $\omega_z = 15^\circ/\text{ч}$ – угловая скорость вращения Земли. Путь, пройденный объектом, определяется по формуле

$$s = R(\Delta\alpha \pm \omega_z t)\cos\varphi,$$

где φ – широта параллели, по которой движется объект.

Алгоритм определения пути при произвольном движении объекта получается соответствующим разложением каждого малого участка пути объекта на северную и восточную составляющие.

На первый взгляд может показаться, что метод Р. Вуссова и геометрический метод построения систем инерциальной навигации не имеют ничего общего. Однако на самом деле, с одной стороны, в методе Р. Вуссова геометрические операции заменяются вычислительными, а с другой – свободный гироскоп можно рассматривать как интегратор угловой скорости системы координат XYZ (рис. 2.1), имеющей начало в центре Земли, и одну из осей, проходящую через центр масс объекта. Инерциальные навигационные системы, в которых определение координат осуществляется с помощью вычислительной процедуры, называются аналитическими или полуаналитическими.

Работы М. Шулера (Австрия), в которых он установил условия невозмущаемости горизонтальными ускорениями гироскопаса (1910 г.), физического и гироскопического маятников (1923 г.) в движении основания по дуге неподвижного большого круга были важнейшим достижением. Было показано, что при выполнении условия невозмущаемости для маятников последние обладают периодом нулевого спутника (84,4 мин).

После работ М. Шулера значительным достижением было предложение Л. М. Кофмана и Е. Б. Левенталя (1932 г., СССР) под названием «Навигационный прибор для регистрации пройденного пути и скорости», главным в котором является разработанный принцип интегрального управления (интегральной коррекции) гироскопом. По существу авторы усовершенствовали схему Р. Вуссова, ввели обратную связь от первого интегратора, приложив момент к гироскопу. Вследствие обратной связи (коррекции) гироскоп, будучи предварительно выставлен по вертикали, затем следит за вертикалью места. Система моделирует физический маятник с периодом М. Шулера. При этом платформа, на которой установлены акселерометры, приобретает удивительное свойство невозмущаемости, когда ее угловое положение не зависит от ускорений объекта, на котором установлена платформа. Азимутальную ориентацию площадки с акселерометрами предлагалось осуществлять с помощью гироскопаса. Полагали, что, применив такое же второе устройство для направления, перпендикулярного первому, можно решить задачу определения параметров движения по поверхности Земли. Тогда первые интегралы от показаний акселерометров дают компоненты скорости, а вторые интегралы – пройденный путь по сфере. В данной системе непосредственное интегрирование показаний акселерометра будет определять собой решение дифференциального уравнения движения ц. м. объекта только в предположении движения последнего по большому кругу невращающейся

Земли и при горизонтальном (гравитационный горизонт) расположении оси акселерометра, т. е. для «цилиндрической Земли». При этом результаты интегрирования будут соответствовать (без методических погрешностей) значению скорости и пути. И в данном устройстве применение простого «естественного» способа определения скорости и пути не приводит к приемлемым практическим результатам.

Дальнейшим некоторым продвижением в развитии инерциального метода при рассмотрении движения по поверхности сферы было предложение И. М. Бойкова (1934 г., Австрия) под названием «Устройство для измерения пройденного пути», которое отличалось от схемы Кофмана-Левенталья введением азимутального гироскопа с компенсацией вращения Земли и учетом сходимости меридианов при счислении долготы. Главным в данном предложении, как и в схеме Кофмана-Левенталья, было введение интегрального управления (коррекции) гироскопом. В данной схеме наметился отход от естественного способа: учет сходимости меридианов и вращения Земли. Однако учет только этих факторов не привел к полному исключению методических погрешностей, в частности, от поворотных ускорений, и не было еще установлено уравнение инерциального метода.

Определенное время развитие инерциальных систем проходило на основе гиromаятниковых систем и гироскопических систем с интегральной коррекцией, моделирующими физический маятник М. Шулера и позволяющими построить на движущемся объекте невозмущаемую ускорениями вертикаль. Существенные результаты здесь связаны с именами Б. И. Кудревича, И. В. Геккелера, Б. В. Булгакова, Я. Н. Ройтенберга, А. Ю. Ишлинского.

Первая практическая реализация инерциального метода связана с созданием и использованием в 1942 г. на немецкой ракете V-2 простейшей инерциальной системы для целей наведения (управления). Идеология построения системы основывалась на уравнении инерциального метода определения движения. Ориентация измерительных осей акселерометров осуществлялась по осям инерциальной системы координат, стабилизируемых платформой.

Указанная инерциальная система хотя и была важна в идеологическом плане, но все же решала только одну частную задачу и демонстрировала собой один возможный тип построения системы. В последующем было предложено много других типов и схем, определявших собой развитие определенных идей метода. Однако в начальном периоде развития этих идей Б. В. Булгаковым и группой научных сотрудников, работавших с ним, была поднята проблема инерциального метода в самом его общем виде и дано определенное решение этой проблемы. В 1943–1944 гг. впервые была определена некоторая обобщенная схема инерциальной навигационной системы, в которой измеряется вектор кажущегося ускорения в подвижных

(вращающихся) осях и вектор угловой скорости вращения триэдра этих осей, и были получены уравнения функционирования такой системы, являющиеся математическим алгоритмом.

Практическая реализация схем инерциальных систем в то время стала возможной благодаря разработке силовых гиросtabilизированных платформ и развитию их теории рядом авторов: Б. В. Булгаковым, Я. Н. Ройтенбергом, А. Ю. Ишлинским, а также на основе создания поплавковых гироскопов, предложенных в 1945 г. Л. И. Ткачевым (СССР) и в 1946 г. Ч. С. Дрейпером (США), послуживших базой для построения прецизионных гиросtabilизированных платформ (ГСП).

В последующие годы, помимо сугубо специализированных ИНС для управления ракетами, появились предложения и теоретические работы по системам с аналитическим, геометрическим и смешанным способами построения решения основного уравнения инерциального метода.

2.1.1. Классификация ИНС

Классификация ИНС по способу ориентации трехгранника измерительных осей акселерометров:

- ИНС с произвольной ориентацией осей по отношению как к инерциальной системе координат, так и к объекту;
- ИНС с неизменной ориентацией осей относительно инерциальной системы координат, в частности, это может быть ориентация по осям экваториальной или стартовой систем координат;
- ИНС с неизменной ориентацией осей относительно корпуса объекта;
- ИНС с управляемой ориентацией осей, являющейся известной функцией времени или функцией определенных ИНС координат и скорости их изменения. При этом может быть, например, ориентация по осям экваториальной системы координат, неизменно связанной с Землей, или, например, при выполнении требования, чтобы одна ось измерительного триэдра была неизменно направлена по вектору положения (например, геоцентрическому).

По способу построения решения основного уравнения инерциального метода определения движения:

- ИНС аналитического типа, т.е. с полным решением уравнений метода и пространственной ориентации путем вычислений. Такое решение имеет место, например, при произвольной ориентации измерительного трехгранника или при его неизменной ориентации относительно звезд или корпуса объекта;

- ИНС полуаналитического типа, в которой, в общем случае, связаны пространственное геометрическое построение вертикали места с аналитическим решением уравнений функционирования. В таком типе реализуется ориентация платформы с установленными на ней инерциальными элементами управлением платформы по вычисляемым законам при решении уравнений функционирования;
- ИНС геометрического типа, представляющая собой пространственный построитель вертикали места и координат местонахождения. В данном типе ИНС совмещается устройство управления ориентацией измерительного трехгранника с устройством геометрического построения системы определения координат.

Классификация ИНС по наличию стабилизированной или управляемой платформы, используемой для ориентации измерительного трехгранника:

- бесплатформенные ИНС (БИНС), в которых базовые измерительные устройства (акселерометры, гироскопы) устанавливаются непосредственно на корпусе объекта (рис. 2.2);
- ИНС со стабилизированной или управляемой платформой (рис. 2.3).

Функции, выполняемые управляемой платформой, сводятся, во-первых, к обеспечению определенной пространственной ориентации трехгранника, образованного измерительными осями акселерометров, и, во-вторых, наличие стабилизированной платформы позволяет получить информацию об угловом движении объекта относительно платформы, т. е. определить параметры ориентации. Причем в качестве параметров, характеризующих ориентацию объекта, используется определенная система углов, измерение которых осуществляется датчиками, установленными на осях подвеса платформы (рис. 2.4).

В системах инерциальной навигации без стабилизированной платформы чувствительные элементы – акселерометры и измерители параметров ориентации угловой скорости – монтируются на соответствующей плате, которая

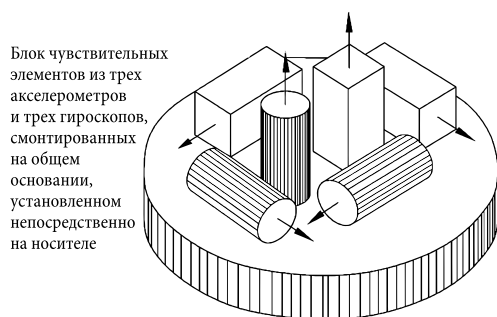


Рис. 2.2. Бесплатформенные ИНС

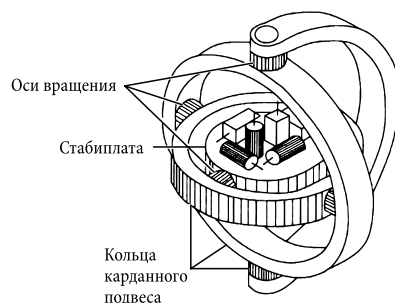


Рис. 2.3. ИНС со стабилизированной или управляемой платформой

крепится на корпусе объекта. При этом количество измерителей должно быть таким, чтобы обеспечивалось получение информации о векторе кажущегося ускорения места установки измерителей и о векторной величине (например, векторе абсолютной угловой скорости), характеризующей угловое движение объекта.

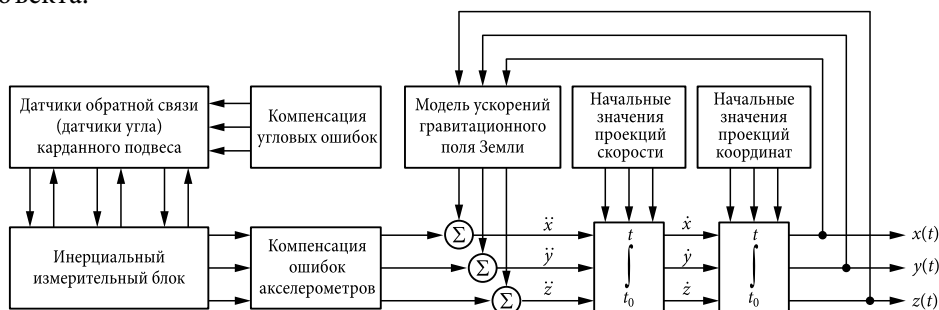


Рис. 2.4

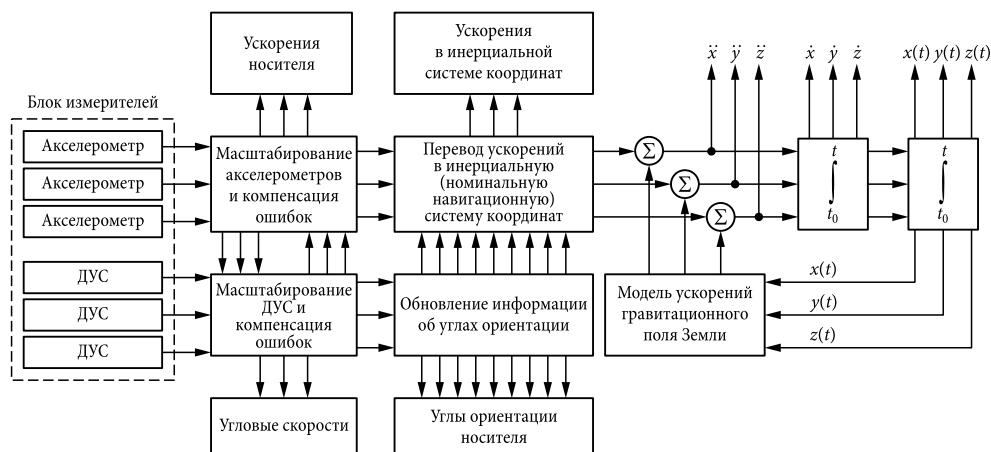


Рис. 2.5

Этой информации наряду с априорными сведениями о гравитационном поле и начальных условиях движения достаточно для последующего вычисления на борту движущегося объекта навигационных параметров (координат, скорости и т. д.) и параметров, характеризующих ориентацию (рис. 2.5).

2.1.2. Инерциальный метод определения параметров движения

Для пояснения идеи инерциальной навигации рассмотрим задачу о движении материальной точки в неинерциальной системе координат. В классической механике с большой степенью точности инерциальной системой координат мож-

но считать прямоугольную декартову систему координат с началом в центре масс Солнечной системы и осями, направленными на неподвижные звезды. Всякая другая система координат, которая движется относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

Пусть $Ox^*y^*z^*$ – инерциальная система координат, $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с некоторым подвижным твердым телом (рис. 2.6). Ускорение материальной точки M относительно системы $Ox^*y^*z^*$ называется абсолютным ускорением и обозначается w^a .

В инерциальной системе координат для любой материальной точки, обладающей массой m , справедлив второй закон Ньютона

$$m\bar{w}^a = \bar{F}. \quad (2.1)$$

здесь \bar{F} – равнодействующая приложенных к рассматриваемой точке сил.

Согласно теореме Г. Кориолиса вектор абсолютного ускорения \bar{w}^a точки равен геометрической сумме трех ускорений

$$\bar{w}^a = \bar{w}^r + \bar{w}^e + \bar{w}^c, \quad (2.2)$$

где \bar{w}^r – относительное, \bar{w}^e – переносное, \bar{w}^c – кориолисово ускорения точки.

Относительным ускорением \bar{w}^r называется ускорение точки относительно подвижной системы координат. Переносным ускорением \bar{w}^e относительно неподвижной системы координат называется ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент совпадает рассматриваемая точка. Кориолисово ускорение \bar{w}^c определяется как удвоенное векторное произведение угловой скорости подвижной системы $\bar{\Omega}$ на вектор относительной скорости точки \bar{v}^r

$$\bar{w}^c = 2 \cdot (\bar{\Omega} \times \bar{v}^r).$$

Направление вектора кориолисова ускорения определяется правилом Н. Е. Жуковского: вектор относительной скорости точки следует повернуть в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости $\bar{\Omega}$, на 90° по направлению вращения подвижной системы координат.

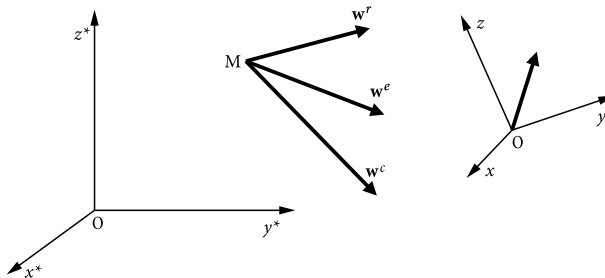


Рис. 2.6

Если подставить выражение для абсолютного ускорения (2.2) в закон Ньютона (2.1), а затем перенести слагаемые с переносным и кориолисовым ускорениями в правую часть, то получится дифференциальное уравнение движения точки в неинерциальной системе координат

$$m\bar{\mathbf{w}}^r = \bar{\mathbf{F}} + \bar{\Phi}^e + \bar{\Phi}^c. \quad (2.3)$$

В этом уравнении векторы

$$\bar{\Phi}^e = -m\bar{\mathbf{w}}^e, \quad \bar{\Phi}^c = -m\bar{\mathbf{w}}^c \quad (2.4)$$

называются соответственно переносной и кориолисовой силами инерции.

Таким образом, основной результат динамики относительного движения материальной точки можно сформулировать следующим образом.

Уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе координат можно записать в форме второго закона Ньютона, если к действующим на точку ньютоновым силам добавить переносную и кориолисовы силы инерции.

В случае, когда материальная точка находится в равновесии в подвижной системе координат, ее координаты будут постоянны, относительная скорость \mathbf{v}^r , относительное ускорение \mathbf{w}^r и кориолисово ускорение \mathbf{w}^c обращаются в нуль.

Следовательно, из уравнения (2.3) получается следующее векторное уравнение равновесия материальной точки в неинерциальной системе координат:

$$0 = \bar{\mathbf{F}} + \bar{\Phi}^e. \quad (2.5)$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\begin{aligned} 0 &= F_x + \Phi_x^e; \\ 0 &= F_y + \Phi_y^e; \\ 0 &= F_z + \Phi_z^e. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используем эти уравнения для определения условий равновесия материальной точки, подвешенной на невесомой пружине в поступательно движущемся объекте вдоль оси z^* (рис. 2.7).

Предположим, что ось z^* инерциальной системы координат направлена вверх по вертикали места, и введем подвижную систему координат xyz , жестко связанную с объектом. Ось z подвижной системы координат параллельна оси z^* . Согласно уравнению (2.5) к действующим на точку силам тяготения mg и упругости $\bar{\mathbf{F}}^{el}$ добавим переносную силу инерции и запишем последнее уравнение (2.6) в виде

$$0 = -mg + F_z^{el} + \Phi_z^e. \quad (2.7)$$

Здесь mg , F_z^{el} – проекции силы тяготения и силы упругости соответственно.

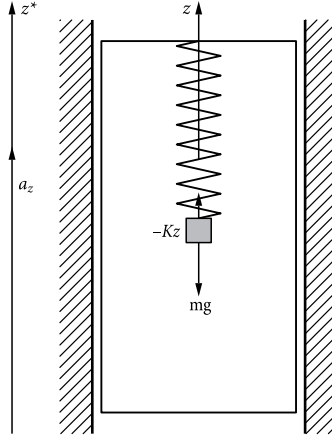


Рис. 2.7

Для простоты предположим, что сила упругости \bar{F}^{el} удовлетворяет закону Гука, согласно которому величина силы пропорциональна деформации пружины z , отсчитываемой от недеформированного положения

$$F_z^{el} = -Kz.$$

Здесь K – жесткость пружины, которая предполагается постоянной (на рис. 2.7 изображен случай, когда деформация пружины z отрицательна и проекция на ось z силы упругости $F_z^{el} = -Kz$ положительна).

Обозначим через a_z проекцию вектора ускорения объекта на ось z (ускорение объекта является переносным ускорением для рассматриваемой материальной точки). Тогда согласно (2.4) $\Phi_x^e = -m \cdot a_z$ и уравнение (2.7) примет вид

$$0 = -m \times g - Kz - m \times a_z.$$

Из этого уравнения определяем деформацию пружины

$$z = - \frac{m(g + a_z)}{K}. \quad (2.8)$$

Это уравнение позволяет рассмотреть следующие частные случаи:

- 1) $a_z = 0$, объект покоится, и деформация z оказывается пропорциональной силе тяготения. Так устроен обычный механический пружинный динамометр, в котором измерение массы тела сводится к измерению деформации пружины;
- 2) $a_z > 0$, объект движется с ускорением вверх, абсолютная величина деформации пружины увеличивается, и наблюдатель, находящийся на объекте и не имеющий контактов с окружающим объектом пространством, фиксирует возрастание деформации пружины, которая им воспринимается

как увеличение силы тяготения. Субъективные ощущения человека, находящегося на объекте (или ракете), называются перегрузкой;

- 3) $a_z < 0$, объект движется с ускорением вниз, деформация пружины уменьшается, и наблюдатель фиксирует уменьшение силы тяготения;
- 4) $a_z = -g$, объект движется вниз с ускорением, равным ускорению свободного падения, деформация пружины обращается в нуль ($z = 0$), и наблюдатель фиксирует исчезновение силы тяготения на объекте. Возникающее состояние называется невесомостью.

Формула (2.8) открывает принципиальную возможность без привлечения внешней информации по деформациям пружины судить об ускорении объекта, которое, вообще говоря, является функцией времени $a_z = a_z(t)$. При изменении ускорения объекта положение равновесия (2.8) точки изменяется и возникает некоторый переходный процесс, после которого точка оказывается в новом положении равновесия. Время переходного процесса зависит от жесткости пружины и сил демпфирования, которые можно создать специальными демпферами, обеспечивающими затухание колебаний точки относительно положения равновесия. Будем считать, что время переходного процесса (время затухания колебаний) оказывается столь малым, что в каждый момент времени справедливо уравнение относительного равновесия точки (2.8), в котором $a_z = a_z(t)$.

Если обозначить через Z абсолютную координату объекта в инерциальной системе координат $Ox^*y^*z^*$, V_z – проекцию абсолютной скорости объекта на ось z , то

$$\begin{aligned} a_z(t) &= \frac{dV_z}{dt}; \\ V_z(t) &= \frac{dZ}{dt}; \\ a_z(t) &= \frac{d^2Z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Согласно (2.8) и (2.9) имеем

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{mg + Kz(t)}{m}. \quad (2.10)$$

Умножая это уравнение на дифференциал времени dt и интегрируя на некотором временном интервале $[0, t]$, получаем

$$V_z - V_z^0 = -\int_0^t \left[g + \frac{K}{m} z(\tau) \right] d\tau. \quad (2.11)$$

Здесь V_z^0 – значение скорости объекта в начальный момент времени.

Учитывая (2.9) и еще раз выполняя интегрирование по времени уравнения (2.11), находим абсолютную координату объекта

$$Z(t) - Z^0 = tV_z^0 - \int_0^t \int_0^\xi \left[g + \frac{K}{m} z(\tau) \right] d\tau d\xi. \quad (2.12)$$

Здесь Z^0 – начальное значение координаты объекта в инерциальной системе координат.

Формула (2.12) объясняет принцип работы систем инерциальной навигации, которые при известном ускорении силы тяготения и известных начальных условиях позволяют с помощью двукратного интегрирования функции $z = z(t)$, представляющей собой деформацию пружины, автономно, без привлечения дополнительной информации, определять координаты поступательно движущегося объекта.

Таким образом, навигационные приборы, реализующие инерциальный принцип получения информации, позволяют измерять лишь кажущиеся параметры поступательного движения объекта навигации. Для определения действительных параметров движения необходимо решить основное уравнение инерциальной навигации, которое выражает действительное ускорение объекта навигации как сумму кажущегося ускорения и ускорения силы притяжения. Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{g}}(\bar{R}).$$

Приводя это уравнение к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \dot{\bar{\mathbf{w}}} + \bar{\mathbf{g}}(\bar{R}); \\ \frac{d\bar{R}}{dt} &= \bar{\mathbf{V}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где \bar{R} – радиус-вектор центра масс объекта; $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ – вектор кажущегося ускорения; $\bar{\mathbf{g}}(\bar{R})$ – вектор ускорения силы притяжения, определяемый моделью гравитационного поля.

Для определения текущих параметров движения объекта (его координат и скорости) необходимо интегрировать уравнения (2.13) с начальными условиями $\bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{V}}_0$.

Рассмотрим состав информации, необходимой для решения задачи инерциальной навигации. Эту информацию принято подразделять на три вида: исходная, начальная и первичная.

Исходная информация включает совокупность сведений, которые остаются неизменными в течение всего цикла решения навигационной задачи и во

всех условиях применения объекта навигации. Для баллистических ракет и ракет-носителей исходная информация остается неизменной независимо от условий пуска ракет данного типа. В состав исходной информации входят:

- системы координат, в которых описываются начальные, промежуточные и конечные данные решения навигационной задачи;
- принятая для данного типа ракет модель геопотенциала;
- алгоритмы интегрирования основного уравнения инерциальной навигации и решения навигационной задачи в целом.

Среди систем координат, используемых при решении навигационной задачи, выделим:

- измерительную систему координат, связанную с осями чувствительности измерительных приборов;
- геоцентрическую относительную систему координат, в которой задается модель гравитационного поля Земли;
- навигационную систему координат, в которой получается решение навигационной задачи.

Исходная информация является частью так называемой консервативной информации, входящей в состав программно-алгоритмического обеспечения системы управления ракетой.

Начальная информация включает сведения о начальном положении и начальной скорости объекта навигации, а также сведения о начальной ориентации осей чувствительности измерителей ИНС в основной инерциальной системе координат. Для баллистических ракет, в том числе для ракет мобильного базирования, начальную информацию получают с помощью средств астрономо-геодезического обеспечения пусков ракет, систем наземной навигации и прицеливания.

Первичная информация (называемая также измерительной информацией) представляет собой результаты измерений текущих параметров движения объекта навигации, фиксируемые на выходе измерителей ИНС и преобразованные к виду, пригодному для использования в алгоритмах решения навигационной задачи.

2.1.3. Особенности использования БИНС

Уравнения, подлежащие решению в бортовой цифровой вычислительной машине (БЦВМ), входящей в состав БИНС, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}}) - \bar{\boldsymbol{\Omega}} \times \bar{\mathbf{V}} + \dot{\bar{\mathbf{w}}}; \\ \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} &= -\bar{\mathbf{W}} \times \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{V}},\end{aligned}\tag{2.14}$$

где $\bar{\mathbf{R}}$ – вектор положения объекта (геоцентрический радиус-вектор точки места); $\bar{\mathbf{V}} = \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt}$ – вектор абсолютной скорости объекта; $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ – вектор абсолютной угловой скорости вращения объекта (вектор угловой скорости связанного трехгранника); $\bar{\mathbf{w}}$ – вектор кажущегося ускорения; $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}})$ – вектор градиента гравитационного поля; $\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt}$ и $\frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt}$ – локальные производные векторов $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{V}}$ в осях трехгранника, вращающегося со скоростью $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$.

- Нетрудно видеть, что для решения уравнений (2.14) в БЦВМ необходимо:
- задать вид функции $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}})$, например, положить, что движение происходит в центральном гравитационном поле, тогда $g(R) = -\left(\frac{\mu}{R^3}\right)R$, где μ – гравитационный параметр;
 - ввести информацию о векторах $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ и $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$;
 - в момент начала работы системы ввести значения векторов $\bar{\mathbf{R}}_0$ и $\bar{\mathbf{V}}_0$.

При выполнении указанных условий система уравнений (2.14) может непрерывно интегрироваться в БЦВМ, на выходе которой будут получены значения векторов $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{V}}$ в виде их проекций на оси трехгранника, вращающегося с угловой скоростью $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, т. е. на оси связанного трехгранника. Если орты осей этого трехгранника обозначить через $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$, то выходные сигналы БЦВМ можно сопоставить с векторами

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{i}_c x + \mathbf{j}_c y + \mathbf{k}_c z; \\ \bar{\mathbf{V}} &= \mathbf{i}_c V_x + \mathbf{j}_c V_y + \mathbf{k}_c V_z.\end{aligned}$$

При решении задачи определения так называемых кажущихся скорости и координат в (2.14) следует положить $\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}}) = 0$. В итоге решения системы уравнений будет получена информация о навигационных параметрах $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{V}}$, характеризующих движение объекта. Однако остается открытым вопрос об ориентации трехгранника $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ в пространстве, который в ИНС со стабилизированной платформой решается путем снятия сигналов с датчиков, установленных на осях подвеса.

В рассматриваемом случае имеются два пути определения ориентации трехгранника $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$. Первый путь, основанный на использовании геометрических соотношений, заключается в следующем. В БЦВМ вычисляются единичные орты

$$\begin{aligned}r &= \frac{\bar{\mathbf{R}}}{R} = \mathbf{i}_c \frac{x}{R} + \mathbf{j}_c \frac{y}{R} + \mathbf{k}_c \frac{z}{R}; \\ v &= \frac{\bar{\mathbf{V}}}{V} = \mathbf{i}_c \frac{V_x}{V} + \mathbf{j}_c \frac{V_y}{V} + \mathbf{k}_c \frac{V_z}{V}\end{aligned}$$

и затем, используя эти векторы, вычисляется ортогональный базис

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \bar{\mathbf{r}}; \quad \bar{\mathbf{q}}_2 = \frac{\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{r}}}{|\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{r}}|}; \quad \bar{\mathbf{q}}_3 = \bar{\mathbf{q}}_2 \times \bar{\mathbf{q}}_1.$$

Поскольку векторы $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ определены в осях трехгранника i_c, j_c, k_c , то тем самым воссозданы элементы матрицы направляющих косинусов между осями i_c, j_c, k_c и базисом $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$, у которого векторы \bar{q}_2 и \bar{q}_3 лежат в плоскости, перпендикулярной \bar{r} . По известным направляющим косинусам могут быть вычислены любые другие параметры ориентации.

Второй путь определения параметров ориентации основан на использовании кинематических соотношений и по существу предполагает решение в БЦВМ задачи определения положения твердого тела по известной угловой скорости.

Уравнения, которые должны решаться в БЦВМ, будут иметь различный вид в зависимости от того, какими параметрами, характеризующими вращение, будет задаваться ориентация трехгранника i_c, j_c, k_c .

Существенными при этом являются три момента:

- поскольку известна (измеряется) абсолютная угловая скорость вращения $\bar{\Omega}$ связанного трехгранника, то ориентация этого трехгранника будет определена относительно неизменно ориентированного в пространстве базиса;
- взаимное положение неизменно ориентированного (базисного) и связанного трехгранников должно быть известно (определено) на момент начала работы системы;
- задача определения параметров ориентации по известной угловой скорости $\bar{\Omega}$ может быть решена совершенно независимо от задачи определения навигационных параметров \bar{R} и \bar{V} .

Последнее обстоятельство является весьма важным, так как позволяет с иных позиций подойти к построению алгоритма работы БИНС. В случае решения в БЦВМ уравнений (2.14) приходится сталкиваться с необходимостью обеспечения высокого быстродействия машины и измерителей угловой скорости, поскольку вектор $\bar{\Omega}$, от которого зависят коэффициенты этих уравнений, может иметь значительную величину и изменять свое направление с большой скоростью. Кроме этого, в результате решения этих уравнений информация о векторах \bar{R} и \bar{V} будет получена в виде сигналов, пропорциональных проекциям этих векторов на оси связанного трехгранника.

Представление навигационных параметров в таком виде является неудобным с позиции дальнейшего их использования в целях навигации и управления движением (наведения).

В силу указанных соображений при построении алгоритма работы БИНС обычно предусматривают такую последовательность операций, которая предполагает в качестве первого этапа решения общей задачи вычисление параметров ориентации по измерениям вектора угловой скорости. В общей задаче определения параметров ориентации можно выделить две части:

- вычисление углов ориентации (углов Эйлера), знание которых необходимо для управления угловым движением объекта;
- вычисление направляющих косинусов между осями связанного и базового трехгранников (последние необходимо знать для решения так называемой задачи определения навигационных параметров).

В результате вычисления матрицы направляющих косинусов между осями связанного и неизменно ориентированного базового трехгранников появляется возможность определить вектор кажущегося ускорения $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ в осях последнего, используя для этого показания акселерометров, измеряющих этот вектор в связанных осях.

Теперь векторы $\bar{\mathbf{R}}$ и $\bar{\mathbf{V}}$ могут быть определены в осях базового трехгранника путем решения уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\mathbf{V}}}{dt} &= \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{R}}) + \dot{\bar{\mathbf{w}}}; \\ \frac{d\bar{\mathbf{R}}}{dt} &= \bar{\mathbf{V}}.\end{aligned}$$

Поскольку навигационные параметры являются более медленно меняющимися функциями времени, чем параметры ориентации, то при рассмотренном подходе к построению алгоритма работы БИНС можно несколько снизить требования к БЦВМ, входящей в ее состав, так как относительно высокое быстродействие должно быть обеспечено лишь при вычислении параметров ориентации.

Из изложенного следует, что задача определения ориентации имеет особую, можно сказать, ключевую роль при построении БИНС.

В результате решения задачи определения параметров ориентации должна быть определена матрица направляющих косинусов между осями базиса, в котором измеряется вектор $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$ (жестко связан с объектом), и осями трехгранника, рассматриваемого в качестве базового. Задача определения этой матрицы решается с использованием измерений, дающих информацию о векторе абсолютной угловой скорости измерительного базиса (образован осями акселерометров) $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$, которому ставится в соответствие матрица

$$|\bar{\boldsymbol{\Omega}}| = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.15)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – проекции вектора $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$ на оси измерительного базиса.

Величинам $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ставятся в соответствие сигналы, поступающие от трех измерителей угловой скорости, конструктивно объединенных в одном блоке так, что их измерительные оси образуют ортогональный базис. Оси это-

го базиса при монтаже устанавливаются параллельно осям акселерометрического трехгранника, в котором измеряется вектор $\dot{\bar{\mathbf{w}}}$.

Практически используемые измерители угловой скорости позволяют получить информацию не о векторе $\bar{\mathbf{\Omega}}$, а о так называемом векторе кажущегося поворота $\bar{\theta}$, определяемом по формуле:

$$\bar{\theta} = \mathbf{i}_c \int_0^t \Omega_1 d\tau + \mathbf{j}_c \int_0^t \Omega_2 d\tau + \mathbf{k}_c \int_0^t \Omega_3 d\tau,$$

где $\mathbf{i}_c, \mathbf{j}_c, \mathbf{k}_c$ – орты измерительного базиса.

Сигналы, пропорциональные величинам

$$\theta_1 = \mathbf{i}_c \int_0^t \Omega_1 d\tau; \quad \theta_2 = \mathbf{j}_c \int_0^t \Omega_2 d\tau; \quad \theta_3 = \mathbf{k}_c \int_0^t \Omega_3 d\tau,$$

получаемым от соответствующих измерителей, используются затем в вычислителе с целью восстановления по ним значений величин $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и, тем самым, определения вектора $\bar{\mathbf{\Omega}}$.

Таким образом, задача определения параметров ориентации (матрицы направляющих косинусов) сводится к известной в теоретической механике задаче определения взаимного положения двух ортогональных базисов по известной угловой скорости.

Существуют два основных пути решения этой задачи:

- непосредственное определение искомой матрицы через вектор $\bar{\mathbf{\Omega}}$;
- определение матрицы через промежуточные параметры, характеризующие вращение, которые, в свою очередь, вычисляются с использованием информации о векторе $\bar{\mathbf{\Omega}}$.

Непосредственно вычислить искомую матрицу направляющих косинусов $|c|$ можно путем решения матричного уравнения Пуассона

$$\frac{d|c|}{dt} = |c| |\bar{\mathbf{\Omega}}|, \quad (2.16)$$

где $|\bar{\mathbf{\Omega}}|$ определяется по (2.15).

При решении уравнения (2.16) в БЦВМ должна поступать информация о векторе $\bar{\mathbf{\Omega}}$, по которой формируется матрица $|\bar{\mathbf{\Omega}}|$. Кроме этого, на момент начала работы системы должно быть известно начальное значение матрицы $|c|$ – матрица $|c^0|$.

При использовании второго пути вычисления матрицы $|c|$ в качестве промежуточных параметров вращения могут вычисляться параметры Родриго – Гамильтона (параметры Эйлера), являющиеся элементами кватерниона. При вычислении этих параметров должно решаться следующее линейное матричное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_3 & \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

По значениям параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, полученным при решении системы уравнений (2.17), можно вычислить соответствующие направляющие косинусы, воспользовавшись матричным равенством

$$|c| = \begin{vmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_3\lambda_2) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{vmatrix}.$$

Можно также применить алгоритм, основанный на использовании параметра, характеризующего вращение и называемого вектором поворота или вектором ориентации $\bar{\Phi}$. Этот вектор определяется следующим образом:

$$\bar{\Phi} = \bar{e} \cdot \bar{\Phi},$$

где \bar{e} – единичный орт оси поворота, вокруг которой объект (трехгранник осей с ним связанный) поворачивается при изменении ориентации в пространстве; $\bar{\Phi}$ – модуль вектора ориентации.

Величина Φ изменяется в пределах $\pm \pi$.

Дифференциальное уравнение, решение которого позволяет определить вектор $\bar{\Phi}$, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} |\bar{\Omega}| \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\Phi^2} \left(1 - \frac{\Phi}{2} \frac{\sin(\Phi)}{1 - \cos^2(\Phi)} \right) \times \left\{ (\Phi_1\Omega_1 + \Phi_2\Omega_2 + \Phi_3\Omega_3) \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{vmatrix} - \Phi^2 \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} \right\}, \quad (2.18)$$

где $|\bar{\Omega}|$ определяется по (2.15); Φ_1, Φ_2, Φ_3 – проекции вектора ориентации на те же оси; $\Phi = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2}$.

Решая с использованием соответствующих численных методов уравнения (2.18), можно определить величины Φ_1, Φ_2, Φ_3 . Для этого необходима информация от ДУС о величинах $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ и о начальном значении вектора ориентации Φ_0 .

По найденным таким образом величинам можно вычислить матрицу направляющих косинусов между осями связанного с объектом трехгранника и осями принятого в качестве базисного, используя следующую матричную форму:

$$|c| = |e| \cos(\Phi) - \frac{1 - \cos(\Phi)}{\Phi^2} \begin{vmatrix} \Phi_1^2 & \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_1 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_2 & \Phi_2^2 & \Phi_2 \Phi_3 \\ \Phi_1 \Phi_3 & \Phi_2 \Phi_3 & \Phi_3^2 \end{vmatrix} + \frac{\sin(\Phi)}{\Phi} \begin{vmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Сравнительное многообразие возможных путей построения алгоритмов вычисления матрицы ориентации выдвигает задачу обоснованного выбора алгоритмов, подлежащих реализации в БЦВМ на этапе проектирования системы.

Эта задача должна решаться с учетом ряда факторов, таких, как характер информации, поступающей с измерителей параметров вращения, быстродействие и разрядность БЦВМ, свойства систем дифференциальных уравнений, подлежащих решению в БЦВМ, и др.

2.2. Наведение

Инерциальная система управления строится на базе гироскопической стабилизированной платформы или комплекса командных приборов бескарданной инерциальной навигационной системы.

Типичная инерциальная навигационная система должна включать как минимум следующие функциональные элементы: чувствительные элементы (гироскопы и акселерометры) и вычислительные устройства (бортовая цифровая вычислительная машина – компьютер) для учета гравитационных ускорений и обработки информации об угловом и линейном движении РН.

Гироскопы обеспечивают систему отсчета, направление которой заранее известно относительно инерциального пространства. Гироскоп – это прибор, использующий способность соответствующим образом закрепленного, быстро вращающегося ротора сохранять заданную ориентацию своей оси в пространстве. Блок из трех гироскопов, установленных определенным образом на объекте, образует так называемый стабилизированный элемент или гироплатформу, которая сохраняет пространственную ориентацию независимо от того, как движется ракета.

Акселерометры являются чувствительными элементами системы. Обычно группа из трех акселерометров устанавливается на стабилизированной платформе так, чтобы оси их чувствительности были взаимно перпендикулярны, что позволит измерять изменение скорости в любом направлении. Акселерометры измеряют вектор негравитационных ускорений корпуса, в котором он заключен. Это ускорение называется кажущимся и обозначается $\dot{\mathbf{W}}$.

Вследствие присущих инерциальной системе погрешностей (прежде всего за счет уходов гироскопов и ошибок измерения приращения кажущейся

ся скорости) и длительного времени работы в значениях определяемых координат накапливаются ошибки.

Для компенсации влияния этих ошибок в ИСН могут применяться средства коррекции:

- спутниковая система навигации;
- аппаратура навигации по маякам-ответчикам;
- астрокоррекция и т. п.

Информация, получаемая с этих средств, позволяет уточнить местоположение РН, внести соответствующие поправки в показания ИСН и тем самым повысить точность системы управления.

Задача управления полетом ракеты-носителя состоит в выведении космического аппарата на опорную орбиту (или отделяющейся части – на падающую траекторию, т.е. траекторию свободного баллистического полета, проходящую через заданную точку цели) и обеспечении устойчивого полета на участке выведения. При этом в соответствии с общими принципами управления движением задача управления полетом рассматривается как совокупность двух взаимосвязанных задач: задачи наведения, заключающейся в формировании системой наведения программ управления движением на активном участке траектории и выработки разовой команды на отделение КА, и задачи стабилизации, заключающейся в отработке сформированных системой наведения программ управления в каналах системы стабилизации, функционирующих как замкнутые системы автоматического регулирования. Полагается, что вся информация о текущих параметрах движения ракеты, необходимая для функционирования систем наведения и стабилизации, получается с помощью инерциальной измерительной системы.

Программами управления называются математические зависимости, определяющие желаемый (требуемый) закон движения ракеты, при котором обеспечивается достижение поставленной цели управления.

Под методом наведения понимается основная идея, сформулированная в виде некоего правила, в соответствии с которым осуществляется выработка программ управления движением и разовых команд наведения (в частности, команды на отделение КА). Данное правило, выраженное в замкнутой математической форме, пригодной для практической реализации в бортовой системе управления, называется алгоритмом наведения. В общем случае программа полета должна быть построена так, чтобы в любой момент времени в нее можно было вносить коррективы на основе последующей информации в движении.

Всю совокупность методов наведения принято подразделять на две группы в зависимости от содержания принципа формирования программ управления

движением, реализуемого данным методом. Различают принципы предварительного и текущего программирования движения.

Принцип предварительного программирования движения заключается в том, что, как это видно из его названия, программы управления формируются заблаговременно, до пуска, и в процессе полета не меняются и не корректируются. Такие программы определяются для номинальных (расчетных) условий полета и являются по своему смыслу программами разомкнутого управления, так как обратная связь по текущим параметрам движения в формировании программ управления не участвует.

Программы разомкнутого управления называются также жесткими или временными программами, так как они выражаются в виде функции текущего времени полета, отсчитываемого от момента пуска ракеты. Характерной особенностью жестких программ управления является то, что они задают один и тот же закон движения ракеты вне зависимости от возмущений, действующих на ракету в условиях реального полета. Принято говорить, что программы управления данного типа программируют движение по жесткой траектории, хотя реальная траектория может сильно отличаться от программной вследствие действия возмущений.

В рамках принципа предварительного программирования движения могут формироваться так называемые гибкие, или параметрические, программы. Независимой переменной в таких программах является не время, а тот или иной параметр движения ракеты. Чаще всего в качестве такого параметра выбирается проекция вектора кажущейся скорости ракеты на ее продольную ось или на вертикальную ось стартовой системы координат. Гибкие программы в номинальных условиях полета тождественны жестким программам, т. е. они задают тот же закон движения. Отличие гибких программ проявляется в реальных условиях полета, так как они зависят от текущих параметров движения, подверженных влиянию возмущений. Поэтому закон движения ракеты, заданный параметрической программой, видоизменяется в реальных условиях полета в зависимости от уровня и характера возмущений. В этом случае полет ракеты осуществляется по гибкой траектории.

Преимущество гибких программ управления по сравнению с жесткими программами заключается в том, что их применение позволяет определенным образом сузить трубку возмущенных траекторий полета ракеты. Это облегчает решение задачи учета ограничений на допустимые параметры движения ракеты-носителя, а также, при известных условиях, уменьшает методические ошибки наведения.

Разовые команды наведения, формируемые в рамках принципа предварительного программирования движения, подразделяются, как и программы управления, на два типа команд: программно-временные и функциональные

команды. Моменты выдачи программно-временных команд определяются до пуска ракеты и жестко фиксированы во времени независимо от условий реального возмущенного полета. Эти команды являются командами разомкнутого управления. Совместно с другими временными командами они объединяются в циклограмму подготовки и проведения пуска ракеты.

Функциональные команды управления формируются по принципу обратной связи и являются командами замкнутого управления. Выдача этих команд осуществляется по признаку достижения некоторой управляющей функцией своего заданного значения, определяемого условиями пуска. Типичным примером функциональной команды наведения является команда на отделение КА, формируемая с помощью баллистической управляющей функции. Моменты выдачи функциональных команд наведения зависят от текущих параметров движения ракеты и в реальных условиях полета отличаются от своих номинальных значений вследствие действия возмущений.

Принцип текущего программирования движения заключается в том, что программы управления определяются непосредственно в полете и формируются по принципу обратной связи, т. е. являются программами замкнутого управления. Разовые команды наведения вырабатываются в этом случае так же, как команды замкнутого управления, и являются, таким образом, функциональными командами.

Принцип текущего программирования охватывает множество различных методов наведения как баллистических ЛА, так и летательных аппаратов других типов.

Методы наведения, реализующие принцип предварительного программирования движения (как с жесткими, так и с гибкими программами), получили наименование функциональных методов наведения. Это название отражает то обстоятельство, что при наведении по заранее заданным программам на бортовую систему наведения возлагается единственная задача – выработка функциональной разовой команды на отделение КА. В свою очередь, методы наведения, реализующие принцип текущего программирования движения (например, метод требуемой скорости), получили наименование «терминальных методов», т. е. решающих задачу управления конечным или терминальным состоянием объекта управления.

2.2.1. Функциональные методы наведения

Любой параметр орбиты (в частности, дальность полета РН – L) однозначно определяется величинами параметров движения центра масс ракеты в момент (t_k) выключения ДУ

$$L = L \left[x(t_k), y(t_k), z(t_k), V_x(t_k), V_y(t_k), V_z(t_k) \right].$$

Изменяя любой из параметров в точке выключения двигателя можно в той или иной степени влиять на величину дальности полета.

Задача управления дальностью заключается в определении такого момента выключения двигателя t_k , при котором будет обеспечено движение ракеты на заданную орбиту (дальность).

Требуемой траектории соответствует совокупность значений номинальных параметров движения \hat{q}_{i_k} ($i = x, y, z, V_x, V_y, V_z$) на номинальный момент \hat{t}_k выключения двигателя.

Если система управления обеспечивает такое реальное движение ракеты, что в момент $t_k = \hat{t}_k$ соблюдается равенство

$$q_i(t_k) = \hat{q}_i(\hat{t}_k), \quad (2.19)$$

то тем самым будет достигнута требуемая (расчетная) орбита (дальность)

$$L = \hat{L} \left[\hat{q}_i(\hat{t}_k) \right] \quad (2.20)$$

и задача управления будет решена.

Такой подход к управлению дальностью предъявляет очень жесткие требования к реальному движению ракеты на программном участке (оно должно быть расчетным), а следовательно, может быть реализовано лишь весьма сложной системой управления.

Реальное движение ракеты сопровождается воздействием многих возмущающих факторов, приводящих к нарушению условия (2.19) на момент t_k .

Очевидно, что требуемая величина функции (2.20) удовлетворяется не только расчетной совокупностью параметров (2.19), но и множеством других совокупностей $q_i(t_k)$.

В силу условий единственности для каждой конкретной возмущенной траектории лишь одна совокупность параметров $q_i(t_k)$ обеспечивает достижение требуемой дальности (орбиты).

В задаче управления дальностью необходимо найти решение (момент t_k), удовлетворяющее уравнению управления

$$L[q_i(t_k)] - \hat{L}(\hat{t}_k) = 0. \quad (2.21)$$

Из-за случайного характера действующих на ракету возмущений момент t_k заранее не может быть определен. Поэтому очевидна необходимость непрерывного измерения параметров $q_i(t)$ и расчета текущей дальности полета $L(t)$, которую достигла бы ракета, если бы двигатель отключили в рассматриваемый момент t .

Приняв во внимание, что система управления обеспечивает достаточно малые отклонения текущих параметров движения от их расчетных значений, можно разложить функцию дальности $L(t)$ в ряд Тейлора в окрестностях рас-

четного момента выключения двигателя t_k и отвечающих требуемым значениям параметров движения $q_i(t_k)$:

$$\Delta q_i(t) = q_i(t) - \hat{q}_i(t), \quad (2.22)$$

$$L(t) = \hat{L}[\hat{q}_i(\hat{t}_k)] + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \Delta q_{i_k} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial q_{i_k}^2} \right) \Delta q_{i_k}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^6 \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial q_{i_k} \partial q_{j_k}} \right) \Delta q_{i_k} \Delta q_{j_k} + R_D, \quad (2.23)$$

где R_D – остаточный член разложения.

Ввиду относительной малости нелинейных членов разложения пренебрежем их величиной и, подставив выражение (2.23) в уравнение управления (2.21), получим

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \Delta q_{i_k} = 0. \quad (2.24)$$

Подставив в это соотношение выражение для $\Delta q_i(t)$ (2.22), получим

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) \hat{q}_{i_k}(\hat{t}_k) = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right) q_i(t_k). \quad (2.25)$$

Очевидно, что и уравнение управления (2.21), и равенства (2.24) или (2.25) выражают одну и ту же сущность управления – в момент выключения ДУ обеспечивается нулевое отклонение реальной дальности полета от требуемой.

Следует отметить, что такое утверждение не строго в отношении равенства (2.24), так как оно получено при пренебрежении нелинейными членами разложения функции $D(t)$ в ряд Тейлора.

Коэффициенты $\left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial q_{i_k}} \right)$ называют баллистическими производными. Они характеризуют величину отклонения дальности при отклонении соответствующего параметра $q_i(t_k)$ на единицу его величины $\Delta q_{i_k}(t_k) = 1$.

Анализ величин производных показывает, что вариации параметров движения в плоскости стрельбы (x , V_x , y , V_y) оказывают значительно большее влияние на отклонения дальности, чем вариации параметров бокового движения (z , V_z). Эта особенность позволяет вести управление дальностью лишь по четырем параметрам продольного движения. При этом система управления должна быть выполнена таким образом, чтобы боковые отклонения от плоскости стрельбы непрерывно сводились к нулю.

Функцию параметров движения Φ , с помощью которой определяется момент выключения ДУ, называют управляющей функцией или управляющим функционалом. Очевидно, что управляющая функция должна находиться во взаимнооднозначном соответствии с дальностью полета, т. е. каждому конкретному значению управляющей функции должно соответствовать одно значение дальности и наоборот.

Не существует какого-либо общего, единого, способа отыскания вида управляющей функции $\Phi(t)$. Но чем она проще, тем проще ее реализовать приборно. Но в то же время, чем меньше параметров движения она учитывает и чем грубее этот учет, тем меньше ее соответствие реальной дальности полета и, как результат, больше погрешность управления дальностью.

Достоинством функциональных методов наведения является простота приборной реализации. Однако приемлемая точность наведения достигается при условии движения РН в малой окрестности программной траектории, для чего используют системы регулирования движения центра масс РН: продольной, нормальной и боковой составляющих кажущейся скорости.

2.2.2. Терминальное наведение

Основное отличие терминального метода наведения от функционального заключается в том, что программа управления полетом рассчитывается не однократно перед стартом на стационарных ЦВМ, а многократно в полете бортовым компьютером на основании данных о текущих параметрах движения РН и требуемой целевой функции (например, орбиты).

При терминальном наведении реализуется принцип текущего программирования движения, при котором программы управления замкнуты и рассчитываются непосредственно в процессе полета исходя из требуемой для выполнения заданных краевых условий скорости. Поскольку понятие требуемой скорости относится к активному участку полета, метод требуемой скорости как нельзя лучше подходит для наведения баллистических ракет. Он может быть применен также для наведения ЛА других типов, имеющих фазу пассивного полета, космических ракет-носителей, космических аппаратов, совершающих межорбитальные или межпланетные перелеты, и др. Метод непригоден для наведения ЛА, у которых управляемый полет продолжается до момента встречи с целью (зенитных ракет, ракет класса «воздух-воздух», «воздух-поверхность», крылатых ракет).

Идея метода требуемой скорости была высказана впервые в 1950-х годах. С тех пор этот метод получил интенсивное развитие и известен в нескольких различных вариантах. Значительный вклад в разработку данного метода внесен американскими специалистами под руководством Р. Бэттина.

В США этот метод разрабатывался первоначально в варианте так называемой Q-системы, а затем в измененном виде применялся в системе управления КК «Аполлон». Алгоритмическая простота метода Q-системы позволила реализовать его в аналоговых СУ без применения БЦВМ на баллистических ракетах первых поколений «Тор» и «Поларис». Однако это достоинство Q-системы в значительной мере обесценивалось существенным недостатком, заключающимся в чрезвычайной трудоемкости задачи подготовки данных на пуск и большом объеме полетного задания, что усложняло применение названного метода для ракет мобильного базирования.

С появлением БЦВМ открылась возможность существенного видоизменения алгоритмического содержания метода требуемой скорости и значительного упрощения задачи расчета полетного задания. Это позволило решить проблему эффективного применения данного метода наведения на мобильных ракетных комплексах, способных осуществлять пуски ракет из любой точки маршрута боевого патрулирования.

Метод известен в двух вариантах:

- метод текущей требуемой скорости;
- метод конечной требуемой скорости.

Теоретические основы методов приведены в (Разоренов, Бахрамов, Титов 2003). Ниже приведены только конечные формулы, необходимые для понимания сути рассматриваемых методов.

Терминальные условия наведения для всех методов определяются стандартным образом как условия нулевого промаха, (например, точки падения ОЧ от точки прицеливания), заданные равенствами

$$\begin{aligned}\Delta L(r_{ц}) &= 0; \\ \Delta B(r_{ц}) &= 0,\end{aligned}\tag{2.26}$$

на момент выполнения условия

$$r(t) = r_{ц}.\tag{2.27}$$

Назовем требуемой скоростью $\bar{V}^{тр}$ такую скорость в момент t при известном положении $r(t)$, при которой в случае обнуления тяги ДУ и отделения ЛА в рассматриваемый момент времени траектория последующего движения была бы попадающей. Требуемая скорость определяется двумя условиями (2.26) неоднозначно. Действительно, из физической картины движения ясно, что существует семейство попадающих траекторий, начинающихся в данной точке пространства и проходящих через заданную точку прицеливания. Соответственно, существует множество различных векторов требуемой скорости. Для определения единственного вектора требуемой скорости необходимо предъявить к попадающей траектории дополнитель-

ное требование, расширив тем самым состав условий наведения. В качестве таких дополнительных условий чаще всего задается либо полное время полета ОЧ до точки падения

$$T(r_{\text{ц}}) = T^{\text{зад}}, \quad (2.28)$$

либо угол входа ОЧ в плотные слои атмосферы

$$\vartheta_{\text{вх}}(H_{\text{вх}}) = \vartheta_{\text{вх}}^{\text{зад}}. \quad (2.29)$$

Таким образом, условия попадания (2.26) совместно с одним из дополнительных условий (2.28) или (2.29) однозначно определяют требуемую скорость в любой точке траектории движения ракеты.

Метод текущей требуемой скорости

По своему определению требуемая скорость является функцией координат рассматриваемой точки пространства, т. е. вектора $\bar{\mathbf{r}}$. Кроме того, вследствие перемещения точки прицеливания в абсолютном пространстве из-за вращения Земли требуемая скорость явным образом зависит от текущего времени. Можно заметить также, что явная зависимость требуемой скорости от времени имеет место при задании терминального условия (2.28), если даже вращение Земли не принимать во внимание. В дальнейшем полагаем, что в общем случае требуемая скорость является функцией координат и времени

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}} = \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}}(t, \bar{\mathbf{r}}).$$

Допустим, что имеется возможность рассчитывать текущее значение требуемой скорости на борту ракеты в реальном масштабе времени. Найдем разность между требуемой скоростью и текущей скоростью ракеты

$$\Delta \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}} = \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}} - \bar{\mathbf{V}}(t).$$

Требуемое приращение скорости $\Delta \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}}$ показывает, какое дополнительное приращение скорости надо сообщить ракете для достижения момента отделения КА. Дальнейшее управление движением ракеты, т. е. выбор программных углов тангажа и рыскания, определяющих направление вектора тяги ДУ, должно осуществляться таким образом, чтобы обеспечить набор недостающей скорости $\Delta \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}}$, а отсечку тяги ДУ и отделение КА следует провести в момент обнуления вектора $\Delta \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}}$. На практике требование равенства нулю модуля требуемого приращения скорости заменяют неравенством

$$|\Delta \bar{\mathbf{V}}^{\text{тр}}| \leq \varepsilon, \quad (2.30)$$

где ε – заранее выбранная малая величина, определяемая допустимой методической погрешностью наведения.

Как видно, идея наведения является по своей сути достаточно простой.

Однако ее практическая реализация сталкивается с серьезной трудностью, связанной с необходимостью рассчитывать текущие значения требуемой скорости в реальном масштабе времени, при этом допустимое запаздывание в определении требуемой скорости не должно превышать сотых долей секунды. Если учесть, что для расчета требуемой скорости необходимо решить соответствующую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, описывающих полет КА на пассивном участке траектории с учетом движения в атмосфере, то станет очевидной трудность решения этой задачи за время, не превышающее допустимого запаздывания в расчете требуемой скорости, даже с применением высокопроизводительных БЦВМ.

Эту трудность удалось преодолеть в варианте метода, получившем в американской литературе название Q-системы. Рассмотрим сущность данного варианта метода требуемой скорости.

Основу метода Q-системы составляет дифференциальное уравнение для дополнительной скорости

$$\frac{d\bar{V}_D}{dt} = -\dot{\bar{W}} - Q\bar{V}_D, \quad (2.31)$$

где $\dot{\bar{W}}$ – кажущееся ускорение ракеты за счет силы тяги ДУ; Q – квадратная матрица третьего порядка, образованная частными производными от компонент вектора текущей требуемой скорости по координатам текущей точки пространства:

$$Q = \frac{\partial \bar{V}_{tr}}{\partial \bar{r}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_X^{tr}}{\partial X} & \frac{\partial V_X^{tr}}{\partial Y} & \frac{\partial V_X^{tr}}{\partial Z} \\ \frac{\partial V_Y^{tr}}{\partial X} & \frac{\partial V_Y^{tr}}{\partial Y} & \frac{\partial V_Y^{tr}}{\partial Z} \\ \frac{\partial V_Z^{tr}}{\partial X} & \frac{\partial V_Z^{tr}}{\partial Y} & \frac{\partial V_Z^{tr}}{\partial Z} \end{vmatrix}.$$

Уравнение (2.31) представляет собой линейное дифференциальное уравнение относительно вектора дополнительной скорости. Данное уравнение позволяет рассчитывать текущие значения вектора дополнительной скорости, причем без нахождения самой требуемой скорости. Для этого следует интегрировать данное уравнение в реальном масштабе времени с соответствующими начальными условиями, определяемыми начальными и терминальными условиями наведения. Для интегрирования уравнения необходимо располагать результатами измерений вектора кажущегося ускорения ракеты и информацией о значениях элементов матрицы Q в текущих точках траектории движения. Ввиду практической невозможности рассчитывать элементы матрицы Q непосредственно в ходе полета ракеты данная задача должна быть решена заблаговременно перед пуском ракеты и данные об элементах

матрицы Q должны быть введены в память бортовой СУ в составе полетного задания.

Интересная особенность уравнения (2.31) состоит в том, что оно не содержит вектор гравитационного ускорения. Это создает обманчивое впечатление о независимости задачи расчета дополнительной скорости от модели гравитационного поля. На самом деле информация о модели гравитационного поля отражена в элементах матрицы Q . Другой важной особенностью этого уравнения является то, что хотя вектор дополнительной скорости определен в действительных параметрах движения, для решения данного уравнения нужна информация только о кажущемся ускорении ракеты. Таким образом, метод требуемой скорости в варианте Q -системы не нуждается в нахождении действительных параметров движения и в интегрировании основного уравнения инерциальной навигации.

Очевидно, что вектор \vec{W} следует направить так, чтобы обеспечивалось уменьшение модуля дополнительной скорости и сведение ее к нулю.

Условием уменьшения вектора дополнительной скорости \vec{V}_D является отрицательность его производной

$$\dot{\vec{V}}_D < 0, \quad \left(\dot{\vec{V}}_D = \frac{d\vec{V}_D}{dt} \right).$$

Среди допустимых направлений вектора $\dot{\vec{W}}$ целесообразно выбирать энергетически оптимальное по критерию минимума расхода топлива при управлении движением ракеты на активном участке траектории или, что эквивалентно, по критерию минимума времени, потребного на сведение модуля дополнительной скорости к нулю. Направление вектора $\dot{\vec{W}}$ выбирается таким образом, чтобы вектор $\dot{\vec{V}}_D$ был противоположен по направлению вектору \vec{V}_D . Данное условие может быть сформулировано как равенство нулю векторного произведения

$$\dot{\vec{V}}_D \times \vec{V}_D = 0.$$

Исследование оптимальности такого управления (Разоренов, Бахрамов, Титов 2003) показывает, что оно не является оптимальным по критерию минимума расхода топлива.

Оптимальное направление вектора тяги (единичный вектор $\vec{e}_{\dot{W}}$, определяющий направление вектора тяги и продольной оси ракеты) может быть определено в соответствии со следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \vec{e}_{\dot{W}} &= \frac{1}{\dot{W}} (\gamma \vec{b} + \beta \vec{e}_D); \\ \beta &= \sqrt{\dot{W}^2 - \gamma^2 \left[b^2 - (\vec{e}_D \cdot \vec{b})^2 \right]} - \gamma (\vec{e}_D \cdot \vec{b}); \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\bar{b} = -Q \cdot \bar{V}_D,$$

где γ – параметр управления, который может изменяться от 0 до 1.

Оптимальное по критерию минимума значение расхода топлива γ определяется путем моделирования процесса управления при заданных условиях пуска.

Наведение осуществляется следующим образом:

- программные значения углов тангажа и рыскания определяются в процессе полета по ориентации вектора $\bar{e}_{\dot{W}}$, определяемого выражением (2.32), где \dot{W} – измеренное значение модуля вектора кажущегося ускорения;
- момент обнуления тяги ДУ и отделения ОЧ определяется условием равенства нулю модуля дополнительной скорости или, точнее, условием (2.30) малости этой величины.

Необходимо отметить простоту алгоритма выработки команды на отделение КА. В отличие от функционального метода наведения здесь не возникает проблемы раздельного управления дальностью и направлением полета. Более того, обеспечивается одновременная реализация трех терминальных условий наведения.

Метод конечной требуемой скорости

Метод наведения по конечной требуемой скорости представляет собой видоизменение (модификацию) метода текущей требуемой скорости. Суть модификации заключается в том, чтобы преодолеть главное затруднение, препятствующее практической реализации метода текущей требуемой скорости, – необходимость высокоточного определения требуемой скорости в реальном масштабе времени с минимальным запаздыванием, которое не должно превышать сотых долей секунды.

Наведение по этому методу осуществляется по двум контурам управления:

- контур коррекции,
- контур наведения.

В контуре коррекции, функционирующем периодически с периодом T , проводятся расчеты по прогнозированию параметров движения ракеты на прогнозируемый момент окончания T и решается краевая задача по определению корректирующей поправки $\Delta \bar{V}^{(j)}$ – требуемое приращение кажущейся скорости (здесь j – номер цикла коррекции).

Процесс последовательного уточнения конечной кажущейся скорости и, соответственно, требуемого приращения кажущейся скорости описывается соотношениями

$$\bar{W}_k^{(j+1)} = \bar{W}_k^{(j)} + \Delta \bar{V}_k^j, \quad \bar{W}_k^{(j)} = \bar{W}_k^p, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\Delta \bar{W}_k^{(j+1)}(t) = \Delta \bar{W}_k^{(j)}(t) + \Delta \bar{V}_k^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Расчеты по прогнозированию параметров движения ракеты заключаются в интегрировании следующих уравнений на интервале $[t_j, t_k^{(j)}]$

$$\dot{\bar{V}} = \dot{\bar{W}} + \bar{g}(\bar{r}),$$

где t_j – момент начала очередного цикла коррекции; $t_k^{(j)}$ – прогнозируемый момент обнуления тяги ДУ.

В качестве начальных условий принимают параметры $\bar{r}(t_j)$, $\bar{V}(t_j)$, значения которых получаются по информации навигационно-измерительной системы. Интервал времени $t_k^{(j)} - t_j$, оставшийся до обнуления тяги ДУ, оценивается по величине требуемого приращения кажущейся скорости $\Delta \bar{W}_k^{(j)}(t_j)$. Программные значения углов тангажа и рыскания на интервале прогноза полагаются постоянными и равными своим значениям, найденным на момент начала текущего цикла коррекции по ориентации вектора $\Delta \bar{W}_k^{(j)}(t_j)$. Тем самым алгоритм циклического прогнозирования движения ракеты на оставшейся части АУТ и коррекции конечной требуемой скорости замкнут контуром обратной связи по действительным параметрам движения, что обеспечивает компенсацию действующих возмущений и сходимость итерационного процесса уточнений конечных параметров движения ракеты к таким их значениям, при которых обеспечивается реализация заданных терминальных условий наведения с требуемой точностью.

В контуре наведения с малым периодом, кратным такту работы БЦВМ, производится расчет программных значений углов тангажа и рыскания по текущей ориентации вектора требуемого приращения кажущейся скорости $\Delta \bar{W}_k^{(j)}(t_j)$. Параллельно с этим проверяется условие $|\Delta \bar{W}_k^{(j)}(t_j)| \leq \varepsilon$, при выполнении которого начинается выполнение команды на отсечку тяги ДУ и отделение КА.

Методические ошибки метода определяются погрешностями прогнозирования параметров движения ракеты на момент обнуления тяги ДУ (погрешности прогноза) и погрешностями решения краевой задачи по уточнению конечной требуемой скорости (погрешности коррекции конечной скорости). Погрешности прогноза определяются погрешностями модели гравитационного поля в уравнениях движения ракеты на обнуления тяги ДУ, погрешностями метода численного интегрирования уравнений движения на интервале прогнозирования и влиянием возмущений. Ввиду циклической повторяемости процедуры прогноза с использованием действительных значений текущих параметров движения ракеты влияние перечисленных факторов проявляется лишь в течение небольшого интервала времени, непосредственно

предшествующего отделению КА, длительность которого не превышает продолжительности цикла коррекции T . При уменьшении периода T погрешности прогноза уменьшаются и в пределе при $T \rightarrow 0$ также стремятся к нулю.

Методические ошибки метода наведения, определяемые погрешностями коррекции конечной скорости, непосредственно зависят от точности математических моделей движения КА на пассивном участке полета (в частности, от точности модели гравитационного потенциала и точности модели атмосферы в уравнениях движения на атмосферном участке). Кроме того, эти погрешности зависят от точности применяемых методов численного интегрирования уравнений движения. Ввиду отсутствия в методе наведения механизма компенсации названных погрешностей единственным способом уменьшения этой части методических ошибок наведения является повышение точности моделей движения КА на пассивном участке траектории.

В терминальных методах наведения конечная точка – особая. Это вызывает необходимость заблаговременного прекращения вычислений по итеративной схеме («замораживания» ее отдельных параметров, а непосредственно перед отделением КА, возможно, и самих угловых программ). В этом случае контур управления оказывается разомкнутым, что приводит к увеличению промаха (погрешности выведения). Указанные особенности требуют введения в контур управления систем регулирования движения центра масс боковой и нормальной составляющих скорости, которые обеспечивают требуемую точность.

Наведение по методу требуемых ускорений

Метод требуемых ускорений реализует концепцию управления, основанную на решении обратной задачи динамики. Прямая задача заключается в нахождении движения материального объекта под действием приложенных к нему сил, закон изменения которых полагается заданным. Обратная задача динамики состоит в том, чтобы найти закон изменения приложенных к объекту сил, при котором реализуется заданное движение объекта. Именно так ставится и решается задача управления в рассматриваемом случае – по выбранному из условий задачи желаемому закону движения объекта, выраженному в виде программы изменения его ускорения, с помощью динамических уравнений движения находят такие управляющие силы, которые вместе с другими действующими на объект силами реализуют заданное движение объекта.

Теоретические основы принципов построения алгоритмов управления и решение обратной задачи динамики развиты в работах академика Б. Н. Петрова и его сотрудников (например, (Петров и др. 1983)). Прикладные аспекты метода требуемых ускорений отражены во многих публикациях, среди которых необходимо выделить монографию А. П. Батенко (1977), в которой на простых

примерах ряда задач управления подвижными объектами вскрыты как сущность метода требуемых ускорений, так и его важнейшие особенности.

Содержание метода требуемых ускорений рассмотрим применительно к следующей математической модели объекта управления, заданной в виде совокупности кинематических и динамических уравнений движения:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2; \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) + \bar{\xi},\end{aligned}\quad (2.33)$$

где \bar{x}_1 – вектор положения объекта; \bar{x}_2 – вектор его скорости; $\dot{\bar{x}}_2$ – ускорение объекта, определяемое приложенными к нему силами, среди которых управляющие силы определяются k -мерным вектором параметров управления \bar{u} ; $\bar{\xi}$ – вектор случайных возмущений.

Обозначим через \bar{x} вектор фазовых координат объекта управления, образованный векторами \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$.

Необходимо учесть, что в общем случае параметры управления подчинены ограничениям в виде двусторонних неравенств

$$u_j^{\min} \leq u_j \leq u_j^{\max}, j = 1, \dots, k.$$

Задача управления состоит в переводе объекта из заданного начального состояния $\bar{x}_0 = \{\bar{x}_{10}, \bar{x}_{20}\}$, соответствующего начальному моменту времени $t_0 = 0$, в конечное состояние $\bar{x}_k = \{\bar{x}_{1k}, \bar{x}_{2k}\}$ за время T , которое в зависимости от постановки задачи может быть как фиксированным, так и свободным. Кроме того, к траектории управляемого движения может быть предъявлено то или иное требование оптимальности из условия максимума или минимума некоторой критериальной функции $J(\bar{x}, \bar{u})$.

Решение данной задачи управления по методу требуемых ускорений состоит из двух этапов. На первом этапе находится требуемая траектория движения объекта управления в фазовом пространстве, удовлетворяющая заданным краевым условиям, критерию оптимальности и ограничениям на управление. Требуемую траекторию движения, определяемую законом изменения параметров \bar{x}_1 и \bar{x}_2 , обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1^{\text{TP}}(t) &= \varphi_1(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t), \\ \bar{x}_2^{\text{TP}}(t) &= \varphi_2(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t).\end{aligned}$$

Очевидно, что в силу кинематических уравнений движения здесь справедливо равенство

$$\dot{\bar{x}}_1^{\text{TP}}(t) = \bar{x}_2^{\text{TP}}(t).$$

Продифференцировав вектор $\bar{x}_2^{\text{TP}}(t)$ по времени, получим закон изменения ускорения объекта, соответствующий требуемой траектории его движения

$$\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}}(t) = \frac{d\Phi_2(\bar{x}_0, \bar{x}_k, t)}{dt}.$$

Функцию $\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}}$ назовем программой требуемых ускорений объекта управления.

На втором этапе решения задачи необходимо найти значения параметров управления $\bar{u}(t)$, формирующих такие управляющие силы, при которых обеспечивается программное изменение требуемых ускорений и движение объекта по траектории, ведущей в заданную точку.

Точная реализация программной траектории может быть обеспечена только в случае, если параметры управления удовлетворяют динамическим уравнениям, в которых учтено воздействие возмущений

$$\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}} = \bar{f}[\bar{x}_1^{\text{TP}}(t), \bar{x}_2^{\text{TP}}(t), \bar{u}(t)] + \xi(t). \quad (2.34)$$

Ясно, что нахождение параметров $\bar{u}(t)$ из уравнений (2.34) невозможно ввиду того, что возмущения ξ априори неизвестны и, как правило, не поддаются непосредственным измерениям. Вместо этого может быть измерено действительное ускорение объекта и поставлена задача определения управления $\bar{u}(t)$ по информации о разности программного и действительного ускорений объекта $\Delta\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}}(t) - \dot{\bar{x}}_2^{\text{изм}}$.

Алгоритм определения управления $\bar{u}(t)$ по информации о величине $\Delta\dot{\bar{x}}_2$ запишем условно в виде следующего оператора:

$$\bar{u}(t) = F_t[\Delta\dot{\bar{x}}(t)]. \quad (2.35)$$

Построение алгоритмов управления вида (2.35), обеспечивающих достаточно точную реализацию программной траектории, в принципе возможно, однако на практике такие алгоритмы нерациональны, так как предъявляют чрезмерно жесткие требования к системе управления, которая должна обеспечить движение объекта управления по номинальной траектории при любых действующих на объект возмущениях. Эти требования можно ослабить, если требуемые значения параметров управления определять из условия не точной, а приближенной реализации программной траектории.

В практике управления подвижными объектами получил распространение другой подход к определению параметров управления, основанный на решении динамических уравнений невозмущенного движения объекта управления,

$$\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}} = \bar{f}[\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{u}(t)]. \quad (2.36)$$

Векторное уравнение (2.36) называется определяющим уравнением. Как видим, здесь в отличие от (2.35) возмущения опущены. Алгоритм решения определяющего уравнения запишем в виде следующего оператора:

$$\bar{u}(t) = F_2 \left[\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}}(t), \bar{x}(t) \right]. \quad (2.37)$$

Учет действия возмущений осуществляется косвенным образом путем непрерывного или периодического пересчета требуемой траектории движения и программы требуемых ускорений по информации о действительных параметрах движения, получаемой от навигационно-измерительной системы. В этом случае требуемое движение определяется зависимостями

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{\text{TP}}(t) &= \varphi_1(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t), \\ \bar{x}_2^{\text{TP}}(t) &= \varphi_2(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t), \end{aligned} \quad (2.38)$$

а программа требуемых ускорений выражением

$$\dot{\bar{x}}_2^{\text{TP}}(t) = \frac{d\varphi(\bar{x}(t), \bar{x}_k, t)}{dt}. \quad (2.39)$$

Отметим, что при расчете параметров управления, определяющих требуемые значения управляющих сил, значения других действующих на объект сил рассчитываются по параметрам действительного движения объекта в текущий момент времени. Это обстоятельство отражено в формулах (2.37–2.39), где в правых частях присутствуют значения параметров движения объекта $\bar{x}(t)$, полученные в результате измерений.

Таким образом, имеем замкнутый закон управления, формируемый по принципу обратной связи и обеспечивающий перевод объекта управления в заданное конечное состояние за конечное время.

При непрерывном пересчете программы требуемых ускорений без запаздывания и отсутствии погрешностей измерений метод обеспечивает точное достижение заданного конечного состояния. При периодическом пересчете программы ускорений появляется методическая ошибка управления, величина которой определяется длительностью периода пересчета программы и уровнем действующих возмущений.

Ключевой проблемой данного метода является выбор рациональной процедуры определения программы требуемых ускорений. Вообще говоря, эту задачу можно поставить и решить так, как это делается в функциональном методе наведения в рамках принципа предварительного программирования движения, т. е. по полным уравнениям движения с учетом ограничений на управления и требования оптимальности. Однако этот подход к решению задачи не позволяет сформировать замкнутые законы управления, так как непрерывный пересчет программ требуемых ускорений в реальном масштабе времени по полным уравнениям движения является невыполнимой проблемой при ограниченном быстродействии бортового вычислителя. По

этой причине на практике применяются упрощенные или формальные модели движения.

Наиболее простым решение данной задачи оказывается в том случае, когда программы требуемых ускорений задаются степенными полиномами. Замкнутые законы управления выражаются при этом чрезвычайно простыми зависимостями. Однако применение формальных моделей в виде степенных полиномов выдвигает на первый план вопрос о реализуемости программ управления при имеющихся ограничениях на управляющие воздействия. Для решения данного вопроса необходимо построение областей управляемости и достижимости, в пределах которых могут решаться задачи наведения по синтезированным программам. В конечном счете реализуемость программ управления обеспечивается путем соответствующего сужения области терминальных состояний объекта управления, достижимых из заданного начального состояния.

Глава 3

ТОЧНОСТЬ ВЫВЕДЕНИЯ

Под термином «точность выведения» будем понимать отклонение фактических параметров движения от их расчетных значений в момент отделения космического аппарата или отработавшей ступени.

При стрельбе по наземным целям случайное отклонение точки падения головной части от цели характеризуют двумя случайными величинами – абсциссой и ординатой точки падения на некоторой координатной плоскости, называемой плоскостью рассеивания.

Точность выведения КА описывается двумя группами возмущающих факторов. Первая группа характеризует групповое (общее для всех ракет одной пусковой установки) отклонение. Вторая группа характеризует индивидуальную ошибку каждой ракеты.

Отклонение за счет действия первой группы ошибок определяется как точность стрельбы либо как ошибки подготовки исходных данных на пуск ракеты; второй – как кучность стрельбы или техническое рассеивание.

К ошибкам подготовки исходных данных относят:

- ошибки баллистической подготовки (начальные условия движения КА);
- неточности метеорологической подготовки (локальная атмосфера);
- ошибки исходных геофизических данных (координаты точки старта, уклонения отвесной линии, сила тяжести).

Техническое рассеивание определяется действием:

- ошибок управления на активном участке полета ракеты;
- погрешностями системы отсечки тяги и отделения КА;
- возмущениями атмосферного участка свободного полета.

В качестве контролируемых параметров, характеризующих точность выведения КА, используют, как правило, разброс оскулирующих элементов орбиты в момент отделения КА: большая полуось, эксцентриситет, наклонение, долготы восходящего узла, угловое положение перигея и др.

Точность выведения на незамкнутую орбиту (точность попадания отдельяющейся части) принято характеризовать двумя параметрами: смещением точки пересечения орбиты с поверхностью Земли в плоскости орбиты – отклонение по дальности – и смещением в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты, – отклонение по боковому направлению.

3.1. Основные определения

Контролируемый параметр – случайная величина, на точностные характеристики которой наложены определенные ограничения (требования).

Точностные характеристики – числовые характеристики случайной величины (смещение, разброс).

Смещение – математическое ожидание $\bar{\Delta}$ результатов измерения по совокупности испытаний, определяемое полнотой учета в алгоритмах подготовки данных на испытание факторов, влияющих на смещение.

Разброс – среднее квадратичное отклонение результатов измерения по совокупности испытаний из-за возмущающих факторов, учет которых через алгоритмы подготовки данных на испытание не представляется возможным.

Результат измерения – отклонение контролируемого параметра от эталонного (расчетного) значения по результатам испытания.

Предельное отклонение – доверительная оценка абсолютного отклонения для случайной величины:

- для нормального распределения случайной величины предельное отклонение определяется в соответствии с равенством

$$\Delta \leq K_B \cdot \sigma,$$

$K_B = 3,0$ – для доверительной вероятности 99,7 %;

$K_B = 2,81$ – для доверительной вероятности 99,5 %;

$K_B = 2,7$ – для доверительной вероятности 99,3 %;

$K_B = 2,33$ – для доверительной вероятности 98,0 %;

- для модуля нормального распределения случайной величины доверительной оценкой абсолютного отклонения является значение, определяемое выражением

$$\Delta \leq \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + K_B \cdot \sqrt{\frac{\pi - 2}{\pi}} \right) \cdot \sigma.$$

Оскулирующая орбита – соприкасающаяся орбита (кеплерова орбита) на заданный момент времени (отделение КА).

Поправка – отклонение контролируемого параметра от расчетного значения за счет возмущающего фактора, выявленного, но не учтенного в алгоритмах подготовки данных на испытание (пуск).

3.2. Статистические параметры

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Событие, которое в определенных условиях:

- происходит обязательно, называется достоверным;
- не может произойти, называется невозможным;
- может произойти, но может и не произойти, называется случайным.

Числовой характеристикой степени возможности появления события в тех или иных условиях, которые могут повторяться неограниченное число раз, является вероятность. О вероятности появления того или иного события можно говорить только в рамках определенного испытания.

Числовой характеристикой степени возможности появления события является вероятность и обозначается $P\{A\}$, чаще индекс $\{A\}$ не приводится.

Вероятность достоверного события равна единице, невозможного события – нулю. Для случайного события A справедливо неравенство

$$0 \leq P\{A\} \leq 1.$$

Событие \bar{A} , состоящее в том, что событие A в опыте не осуществляется, называется противоположным для события A . Вероятности противоположных событий связаны соотношением

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}.$$

Если вероятность осуществления одного события не зависит от того, осуществлялось или нет другое событие, то такие события называются независимыми, в противном случае события называются зависимыми.

Вероятность осуществления события A при условии, что произошло событие B , обозначается $P\{A|B\}$ и называется условной вероятностью события A .

Степень зависимости событий измеряется коэффициентами регрессии и корреляции:

- коэффициент регрессии события B относительно события A

$$\rho(B, A) = P\{B|A\} - P\{B|\bar{A}\} = \frac{P\{AB\} - P\{A\}P\{B\}}{P\{A\}P\{\bar{A}\}};$$

- коэффициент регрессии события A относительно события B

$$\rho(A, B) = P\{A|B\} - P\{A|\bar{B}\};$$

- коэффициент корреляции событий A и B

$$r(A, B) = \sqrt{\rho(A, B)\rho(B, A)} = \frac{P\{AB\} - P\{A\}P\{B\}}{\sqrt{P\{A\}P\{\bar{A}\}P\{B\}P\{\bar{B}\}}}.$$

Коэффициенты регрессии и корреляции по абсолютной величине не превосходят единицы и для независимых событий обращаются в нуль.

Величина, значение которой меняется от опыта к опыту случайным образом, называется случайной (СВ). В отличие от неслучайных величин для СВ нельзя предсказать точно, какое она примет значение в определенных условиях, а можно только указать закон распределения СВ.

Закон распределения СВ считается заданным, если:

- указано множество возможных значений СВ;
- указан способ количественного определения вероятности попадания СВ в произвольную область этого множества.

Наиболее общим и распространенным способом определения вероятностей различных значений СВ является задание функции распределения вероятностей СВ, которую сокращенно называют функцией распределения СВ.

Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, задающая вероятность события $X < x$, т. е. вероятность того, что СВ X будет меньше некоторого числа x :

$$F(x) = P\{X < x\}.$$

Функция распределения является полной характеристикой СВ. Однако наиболее часто используют отдельные числовые параметры, характеризующие существенные стороны распределения СВ. Такими числовыми параметрами являются:

- математическое ожидание (МО) характеризует среднее значение (\bar{X}) СВ;
- дисперсия (D_x) характеризует рассеивание СВ относительно ее МО.

В практических задачах рассеивание чаще характеризуют средним квадратичным отклонением σ – СКО

$$\sigma_x = +\sqrt{D_x}.$$

В природе весьма распространены СВ, которые представляют собой сумму большого числа независимых СВ, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией всей суммы.

Влияние каждого индивидуального источника ошибки на конечную результирующую ошибку системы может быть определено на основе центральной предельной теоремы. Эта теорема утверждает, что сумма большого числа независимых случайных величин будет приближенно следовать нормальному закону распределения независимо от того, каким частным распределениям подчинены отдельные слагаемые. Параметром этого закона будет среднее квадратичное отклонение суммы σ_Σ , которое равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратичных отклонений слагаемых

$$\sigma_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

В теории стрельбы рассеивание часто характеризуется **вероятным** (средним) отклонением E . Его название объясняется тем, что вероятности отклонения СВ от центра рассеивания на величину, меньшую E , и на величину, большую E , равны между собой

$$E = \rho \cdot \sqrt{2} \sigma \approx \frac{2}{3} \sigma;$$

$$\rho = 0,4769.$$

За максимальное отклонение $\Delta = 4E$ обычно принимают такое значение, при котором вероятность P получения больших по абсолютной величине отклонений достаточно мала. Это значение также связано некоторым постоянным коэффициентом пропорциональности со средним квадратичным отклонением σ . Так, при $\Delta = 2,698\sigma$ вероятность P равна 0,007, а при $\Delta = 3,0\sigma$ вероятность $P = 0,003$.

Таким образом, максимальное отклонение – это понятие условное, но довольно удобное для практических целей, если твердо помнить о его смысле.

Точность выведения на незамкнутые орбиты (рассеивание точек падения отделяющихся частей РН) принято характеризовать двумя параметрами: отклонением по дальности L и боковому направлению B .

В таком случае рассеивание подчиняется нормальному двумерному распределению с числовыми характеристиками

$$MO_L = \Delta \bar{L}; MO_B = \Delta \bar{B};$$

$$D_L = \sigma_L^2; D_B = \sigma_B^2.$$

Если средние квадратичные отклонения по дальности и боковому направлению равны между собой

$$\sigma_L = \sigma_B = \sigma,$$

то нормальное двумерное распределение называют круговым распределением (рассеиванием), а σ – радиальным средним квадратичным отклонением.

Круговым вероятным отклонением (КВО) называют радиус круга (r_{50}) во-круг цели, вероятность попадания в который равна 0,5

$$r_{50} = 1,1744 \sigma = 1,746 E.$$

При определении вероятности попадания в некоторую область вычисления существенно упрощаются, если заменить эллипс рассеивания с осями σ_L и σ_B круговым распределением с радиальным СКО

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_L + \sigma_B).$$

Замена допустима, если отношение большей оси к меньшей не превосходит 1,5–1,6.

3.3. Методология оценки точности вывода

Исходными данными для расчета точности вывода КА (ошибок орбитальных параметров) являются:

- вектор состояния (\bar{V}, \bar{R}) , определяемый при расчете исполнительной траектории на момент отделения КА;
- корреляционная матрица отклонений вектора состояния $|K|$ РН на момент отделения КА;
- совокупность векторов предельных отклонений кинематических параметров $|C|_j$ за счет j -го возмущающего фактора.

Точностные характеристики РН в первую очередь оцениваются по результатам наземной (лабораторной, заводской, стендовой и пр.) отработки приборов СУ – априорная оценка.

Наконец, учитывая невозможность полной имитации условий полета, результаты априорной оценки дополняются данными летных испытаний (натурных запусков) – апостериорные оценки.

На основании данных орбитальных измерений при запусках КА проводится проверка (уточнение) адекватности принятой математической модели возмущенного движения РН условиям проведения испытаний.

Летные испытания (ЛИ) являются завершающим, наиболее ответственным этапом экспериментальной отработки ракет. Конечной целью ЛИ является заключение о степени соответствия характеристик РН требованиям технического задания. При решении этих задач возникает ряд трудностей, связанных с тем, что статистический материал, полученный при ЛИ вследствие проведения ограниченного количества экспериментов и изменения в их условиях, невелик по объему и неоднороден по составу. Указанные обстоятельства ограничивают возможность определения вероятностных характеристик испытываемых объектов классическими статистическими методами и требуют разработки комбинированных методов, учитывающих информацию, накопленную в процессе предшествующих испытаний и теоретических расчетов (так называемые опытно-теоретические характеристики).

3.3.1. Корреляционная матрица

Используемая методика включает в себя следующие этапы:

А. Расчет номинальных значений кинематических параметров движения РН;

Б. Расчет возмущенных (за счет каждого возмущающего фактора) значений кинематических параметров движения РН;

В. Расчет отклонений кинематических параметров движения РН (элементов целевой орбиты, отклонений точек падения ОЧ).

Расчет отклонений кинематических параметров РН проводится путем параллельного интегрирования уравнений номинального и возмущенного (за счет каждого возмущающего фактора) движения до заданного момента времени (отделения ОЧ) и нахождения разности

$$\Delta Q_{ij} = Q_{ij}^B - Q_i^H,$$

где ΔQ_{ij} – отклонение i -го параметра за счет j -го фактора; Q_{ij}^B – возмущенное (за счет j -го фактора.) значение i -го параметра; Q_i^H – номинальное значение i -го параметра.

При расчете номинальных значений кинематических параметров движения используется следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \left| \dot{\vec{V}} \right| &= \left| \dot{\vec{W}} \right| + \left| \bar{g}(\bar{R}) \right|; \\ \left| \dot{\vec{R}} \right| &= \left| \vec{V} \right|, \end{aligned}$$

где $\left| \dot{\vec{V}} \right|$ – вектор абсолютного ускорения; $\left| \dot{\vec{W}} \right|$ – вектор кажущегося ускорения, определяемый при расчете номинальной (исполнительной) траектории; $\left| \bar{g}(\bar{R}) \right|$ – вектор гравитационного ускорения.

Для расчета возмущенных значений кинематических параметров движения используется система уравнений

$$\begin{aligned} \left| \dot{\vec{V}}^B \right| &= \left| \dot{\vec{W}} \right| + \left| \Delta \dot{\vec{W}}_j \right| + \left| \bar{g}(\bar{R}^B) \right|; \\ \left| \dot{\vec{R}}^B \right| &= \left| \vec{V}^B \right|, \end{aligned}$$

где $\left| \Delta \dot{\vec{W}}_j \right|$ – приращение кажущегося ускорения за счет j -го возмущения.

Вид и величина $\left| \Delta \dot{\vec{W}}_j \right|$ определяются характеристиками ракеты и системы управления.

Результатом расчета является совокупность векторов предельных отклонений кинематических параметров относительно их номинальных значений

$$|C|_j = \begin{vmatrix} \Delta_t X \\ \Delta_t Y \\ \Delta_t Z \\ \Delta_t Vx \\ \Delta_t Vy \\ \Delta_t Vz \end{vmatrix}_j = \begin{vmatrix} x_j^B - x \\ y_j^B - y \\ z_j^B - z \\ Vx_j^B - Vx \\ Vy_j^B - Vy \\ Vz_j^B - Vz \end{vmatrix}, \quad j = 1, \dots, N,$$

где x, y, z, Vx, Vy, Vz – номинальные значения кинематических параметров;

$x_j^B, y_j^B, z_j^B, Vx_j^B, Vy_j^B, Vz_j^B$ – возмущенные за счет j -го фактора значения кинематических параметров; N – количество возмущающих факторов.

По полученному набору векторов $|C|_j$, соответствующему числу возмущающих факторов, составляется матрица предельных отклонений кинематических параметров, которая записывается в виде:

$$|D| = \begin{vmatrix} \Delta_t x_1 & \dots & \Delta_t x_{N-1} & \Delta_t x_N \\ \Delta_t y_1 & \dots & \Delta_t y_{N-1} & \Delta_t y_N \\ \Delta_t z_1 & \dots & \Delta_t z_{N-1} & \Delta_t z_N \\ \Delta_t Vx_1 & \dots & \Delta_t Vx_{N-1} & \Delta_t Vx_N \\ \Delta_t Vy_1 & \dots & \Delta_t Vy_{N-1} & \Delta_t Vy_N \\ \Delta_t Vz_1 & \dots & \Delta_t Vz_{N-1} & \Delta_t Vz_N \end{vmatrix}.$$

Корреляционная матрица определяется следующим образом:

$$|K| = \left(\frac{1}{K_B} \right)^2 \cdot |D| \cdot |D|^T,$$

где K_B – квантиль нормального распределения, соответствующий заданному уровню вероятности предельных отклонений возмущающих факторов (например, $K_B = 2,7$ для доверительной вероятности 99,3%); индекс « T » означает транспонирование.

Элементами корреляционной матрицы являются корреляционные моменты, которые характеризуют рассеивание случайных величин и связь между ними. Полученная матрица симметрична относительно главной диагонали. В связи с этим ее можно записать в виде правой (левой) треугольной матрицы

$$|K| = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{vmatrix}.$$

Другой формой представления результатов расчета ошибок выведения являются:

- нормированная корреляционная матрица вариаций кинематических параметров $|r|$;
- средние квадратичные отклонения проекций вектора состояния на момент отделения КА σ_i

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sqrt{K_{ij}K_{ij}}}; \quad \sigma_i = \sqrt{K_{ij}}, i = j,$$

где r_{ij} , K_{ij} – элементы корреляционных матриц, находящиеся на пересечении i -й строки и j -го столбца.

Поскольку отклонения Q -го параметра (контролируемого элемента орбиты, промаха по дальности или боковому направлению) за счет j -го возмущающего фактора являются независимыми и для них справедлив принцип суперпозиции, то суммарная точность выведения может быть оценена как

$$\Delta Q_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\Delta Q_j)^2},$$

где n – количество возмущающих факторов.

3.3.2. Статистическое моделирование

Метод статистического моделирования – метод Монте-Карло – используется для оценки величин предельных отклонений элементов орбиты, закон распределения которых отличается от нормального.

Разброс параметров орбиты ΔQ_i на момент отделения КА определяется путем соответствующего пересчета матрицы ковариаций $|K|$ в отклонения кинематических параметров $\Delta \bar{V}_B, \Delta \bar{R}_B$ с последующим вычислением вектора состояния \bar{V}_B, \bar{R}_B и параметров орбиты Q_i :

$$\begin{aligned}\bar{V}_B &= \bar{V}_H + \Delta \bar{V}_B, \\ \bar{R}_B &= \bar{R}_H + \Delta \bar{R}_B,\end{aligned}$$

где \bar{V}_H, \bar{R}_H – вектор состояния, определяемый при расчете номинальной траектории.

При известной матрице $|K|$ корреляционных моментов вариаций кинематических параметров траектории отклонения координат и компонентов вектора скорости от их номинальных значений при i -й реализации траектории выведения получают следующим образом.

По формулам линейного преобразования заменяют случайный вектор $|\Delta q|$, компоненты которого коррелированы между собой, другим случайным вектором $|\Delta p|$, компоненты которого не коррелированы и являются линейными функциями компонентов вектора $|\Delta q|$:

$$\begin{aligned}\Delta q_1 &= \Delta p_1 \\ \Delta q_2 &= C_{21}\Delta p_1 + \Delta p_2 \\ \Delta q_3 &= C_{31}\Delta p_1 + C_{32}\Delta p_2 + \Delta p_3 \\ \Delta q_4 &= C_{41}\Delta p_1 + C_{42}\Delta p_2 + C_{43}\Delta p_3 + \Delta p_4 \\ \Delta q_5 &= C_{51}\Delta p_1 + C_{52}\Delta p_2 + C_{53}\Delta p_3 + C_{54}\Delta p_4 + \Delta p_5 \\ \Delta q_6 &= C_{61}\Delta p_1 + C_{62}\Delta p_2 + C_{63}\Delta p_3 + C_{64}\Delta p_4 + C_{65}\Delta p_5 + \Delta p_6,\end{aligned}$$

где $\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_6$ – компоненты случайного вектора Δp ; c_{ij} – коэффициенты

линейного преобразования, определяемые таким образом, чтобы компоненты случайного вектора $|\Delta p|$ были не коррелированы между собой.

Такому условию удовлетворяют коэффициенты, определяемые по формулам

$$C_{i1} = \frac{K_{i1}}{D_{p1}};$$

$$C_{ij} = \frac{1}{D_{pi}} \cdot \left(K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} C_{ik} \cdot C_{jk} \cdot D_{pk} \right), \quad i = 1, \dots, 6, j = 2, \dots, 6.$$

Дисперсии случайных величин Δp_i определяются по формулам

$$D_{p1} = K_{11};$$

$$D_{pi} = K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |C_{ik}|^2 \cdot D_{pk}, \quad i = 2, \dots, 6.$$

Так как компоненты случайного вектора $|\Delta p|$ не коррелированы, то его i -ю реализацию получают как

$$\Delta p_i = K_j \cdot \Delta p, \quad j = 2, \dots, 6,$$

где K_1, \dots, K_6 – случайные некоррелированные числа в i -й реализации, распределенные по нормальному закону с $\sigma_{kj} = 1$.

Случайный вектор $|\Delta q|_i$ в i -й реализации определяется путем линейного преобразования вектора $|\Delta p|_i$:

$$\Delta q_i = \begin{pmatrix} C_{11} & & & & & 0 \\ C_{21} & C_{22} & & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & & \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot |\Delta p|_i.$$

Отклонения элементов начальной орбиты, соответствующие i -й реализации вектора $|\Delta q|_i$, определяются по формуле

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_{ц},$$

где Q_i – оскулирующие элементы начальной орбиты при i -й реализации; $Q_{ц}$ – оскулирующие элементы целевой начальной орбиты.

На основании статистического расчета определяются математические ожидания m_Q , дисперсии D_Q и средние квадратичные отклонения σ_Q для каждого элемента орбиты по формулам:

$$m_Q = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta Q_i}{N}; \quad D_Q = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta Q_i^2}{N-1} - \frac{N}{N-1} \cdot m_Q^2; \quad \sigma_Q = \sqrt{D_Q}.$$

Предельные отклонения элементов орбиты, которые распределены по нормальному закону, определяют как

$$\Delta_Q = K_B \sigma_Q.$$

Предельные отклонения элементов орбиты, закон распределения которых отличается от нормального, определяются следующим образом.

Для заданного уровня доверительной вероятности (например, $P = 0,997$) из N реализованных отклонений ($N = 4000$) соответствующего параметра орбиты выбирается $\frac{1}{2}(1-P) \cdot N$ положительных наибольших отклонений и $\frac{1}{2}(1-P) \cdot N$ наибольших (по модулю) отрицательных отклонений.

Наименьшее (по модулю) из выбранных отклонений принимается соответственно за положительное ($+\Delta Q_{\text{пред}}$) и отрицательное ($-\Delta Q_{\text{пред}}$) предельные отклонения, соответствующие уровню доверительной вероятности 99,7 %.

Глава 4

ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФАКТОРЫ

4.1. Общие положения

Все возмущающие факторы, влияющие на точность выведения РН, можно условно разделить на несколько групп. К первой группе относятся возмущающие факторы, действующие на активном участке траектории, ко второй – возмущающие факторы, действующие на пассивном участке, и, наконец, к третьей – ошибки подготовки геодезических и гравиметрических данных на пуск.

На активном участке траектории, где движение ракеты управляемое, отклонения фактических значений параметров движения от расчетных обуславливаются, в основном, погрешностями системы управления.

Как и любое автоматическое устройство, СУ имеет некоторую инструментальную погрешность, методическую и динамическую ошибки.

Неполнота учета в алгоритмах управления (обработки информации, формирования команд на выключение двигателя) всех факторов, влияющих на динамику полета РН, приводит к появлению так называемой **методической** ошибки. Эта ошибка возникает вследствие того, что приборами системы наведения контролируются кажущиеся параметры, не связанные непосредственно с заданными (параметры эллипса, дальность полета отделяющейся части и т. п.). Для уменьшения методической ошибки обычно приходится усложнять алгоритм управления и, следовательно, саму СУ.

Управление движением центра масс РН сводится к управлению тремя составляющими скорости (продольной, нормальной и боковой) так, чтобы параметры движения центра масс РН в момент отделения КА обеспечивали свободный полет по требуемой траектории. Другими словами, невязки краевых условий (**динамическая** ошибка управления) должны быть достаточно малы.

Инструментальные (приборные) ошибки чувствительных элементов (рис. 4.1) приводят в инерциальных системах навигации к ошибкам в определении скорости и координат объекта, которые изменяются с течением времени. Подробный анализ соотношений между этими ошибками (так называемая

математическая модель ошибок) может быть сделан только для конкретной ракеты и системы управления.

Общими для любой инерциальной системы являются такие ошибки, как смещение нулей и неточности масштабных коэффициентов акселерометров, скорости уходов гироскопов.

Скорости уходов обусловлены возмущающими моментами:

- не зависящими от ускорений. Постоянный момент обычно создается за счет упругих деформаций гибких токоъемников или электрических реакций;
- зависящими от ускорений. Эти моменты возникают из-за дисбаланса масс по двум осям – оси чувствительности и оси кинетического момента.

К возмущающим факторам, действующим на пассивном участке полета, относятся:

- возмущения участка отделения;
- возмущения атмосферного участка полета.

Участок отделения включает в себя участок движения ракеты с момента подачи команды от системы управления на выключение двигателя до отхода КА от корпуса ракеты на достаточное расстояние.

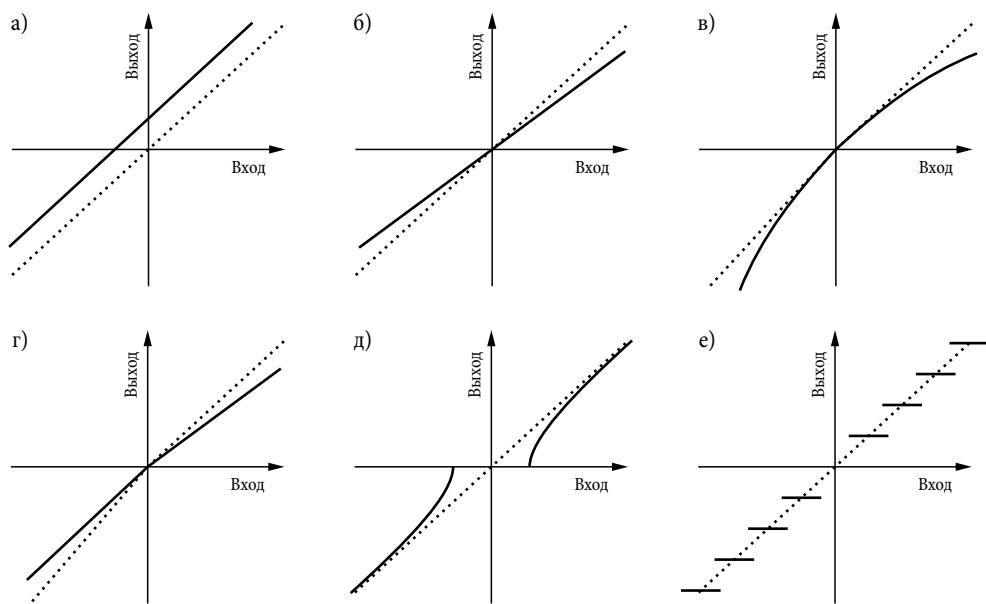


Рис. 4.1. Инструментальные ошибки чувствительных элементов: а) Смещение нуля; б) Масштабный коэффициент; в) Нелинейность; г) Асимметрия; д) Зона нечувствительности; е) Дискретизация

Отделение может осуществляться:

- торможением корпуса отделяющейся ступени с помощью специальных тормозных устройств (двигатели отсечки, тормозные сопла);
- расталкиванием с помощью пружинных толкателей.

При выборе конкретных конструктивных схем отделения решается задача обеспечения надежности процесса отделения (отсутствия соударения) с минимизацией разброса относительной линейной и угловой скоростей отделения.

Атмосферный участок траектории начинается с условной границы атмосферы, высота которой зависит от решаемой задачи, характеристик ОЧ, дальности полета и т. п. Так, например, начало заметного влияния атмосферы на движение ОЧ соответствует высотам около 80–100 км.

Если принять, что вход ОЧ в атмосферу происходит на некоторой условной высоте $H_{\text{вх}}$, и начальную дальность атмосферного участка траектории, соответствующую этой высоте, положить равной нулю, то получим область начальных условий $V_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}$ на высоте $H_{\text{вх}}$.

К области начальных условий движения центра масс объекта при входе в атмосферу предъявляются следующие требования. Область начальных условий должна обеспечивать нормальную работу всех систем отделяемого объекта в заданных условиях пуска на максимальную и минимальную дальности по траекториям оптимального рассеивания и минимального времени прихода в заданную точку и т. д.

Величины возмущающих факторов и соответствующие им составляющие «промаха» определяются в первую очередь исходя из решаемых ракетой задач, достигнутого уровня развития техники и предъявляемых к ракете требований со стороны заказчика пусковых услуг.

4.2. Погрешности управления

Основными возмущающими факторами, определяющими точность выведения за счет погрешностей системы управления, являются:

- инструментальные погрешности чувствительных элементов комплекса командных приборов;
- методические и динамические ошибки управления.

Типовой состав ошибок инерциальных систем управления приведен в табл. 4.1, и применительно к конкретной системе управления он может быть уточнен.

Таблица 4.1. Погрешности инерциальной СУ

Перечень погрешностей	Обозначение	Размерность
<i>Погрешности акселерометров</i>		
Смещение нуля (погрешность измерения, не зависящая от ускорения)	n_t	отнесена к g_0
Неточность масштабного коэффициента	n_m	отнесена к \dot{W}
Погрешности ориентации оси чувствительности в двух взаимно перпендикулярных плоскостях	$\Delta\alpha_z, \Delta\alpha_y$	угл. с
<i>Погрешности гироскопов</i>		
Скорость ухода, не зависящая от перегрузки	P_r, B_r, T_t	дуг. мин/мин
Скорость ухода вследствие разбалансировки по оси чувствительности при действии единичной перегрузки	P_{gr}, B_{gr}, T_{gr}	дуг. мин/мин
Скорость ухода вследствие разбалансировки по оси кинетического момента при действии единичной перегрузки	P_{gk}, B_{gk}, T_{gk}	дуг. мин/мин
<i>Погрешности начального ориентирования</i>		
Погрешность определения углов выставки измерительных осей акселерометров перед стартом относительно плоскости горизонта	Ψ_0, ϑ_0	угл. с
Погрешность определения углов выставки измерительных осей акселерометров перед стартом относительно плоскости меридиана (прицеливание)	Φ_0	угл. с
<i>Другие возмущения</i>		
Относительная нестабильность частоты источника питания	n_f	безразмерная
Невязки краевых условий (динамические ошибки): по составляющим скорости	$\Delta V_{X_0}^y, \Delta V_{Y_0}^y, \Delta V_{Z_0}^y$	м/с
по координатам	$\Delta X_0^y, \Delta Y_0^y, \Delta Z_0^y$	м
Ошибки стабилизации	$\Delta\vartheta_{отд}, \Psi_{отд}$	град

4.3. Ошибки отделения

При выключении двигателя тяга исчезает не мгновенно, а наблюдается так называемое явление последействия. После команды на выключение двигателя за счет догорания определенного количества топлива продолжает создаваться некоторая тяга $P(t)$, импульс которой, называемый импульсом последействия,

выражается формулой

$$I_{\text{пд}} = \int_{t_k}^{t_{n=0}} P(t) dt ,$$

где t_k – время подачи команды на выключение двигателя; $t_n = 0$ – момент времени, соответствующий нулевой тяге.

Среднее значение импульса последействия учитывается при расчете полетного задания. Нестабильность импульса $\Delta I_{\text{пд}}$ относительно его среднего значения приводит к отклонению параметров движения отделяющихся частей (или РН в целом).

К отклонению параметров движения отделяющихся частей приводит также разброс импульса отделения $\Delta V_{\text{отд}}$, сообщаемый объекту в требуемом направлении (ориентации) системой отделения.

4.4. Возмущения атмосферного участка

При движении отделяющихся частей на пассивном участке траектории основные возмущающие факторы, вызывающие отклонения точек падения от расчетных, действуют на атмосферном участке.

К ним, в первую очередь, относятся следующие:

- разбросы параметров атмосферы (плотность, температура);
- ветер;
- отклонения массово-инерционных характеристик ОЧ;
- отклонения аэродинамических характеристик ОЧ;
- разбросы начальных условий углового движения ОЧ при входе в атмосферу.

Отклонения характеристик ОЧ от номинальных по их влиянию на отклонения точек падения сгруппируем следующим образом:

- отклонения веса G , площади мидела S_m и коэффициента аэродинамического сопротивления C_x от расчетных значений (разброс так называемого баллистического коэффициента $\sigma_x = C_x S_m / G$);
- поперечное смещение центра масс ОЧ относительно геометрической оси симметрии.

4.5. Возмущенное движение КА

В разд. 1.2 рассматривалось невозмущенное (кеплеровское) движение КА, т. е. движение в идеализированных условиях – только в поле центральной силы притяжения.

В действительности на движение КА оказывают влияние и другие силы, отличные от центральной силы притяжения. Эти силы обусловлены:

- отличием реального гравитационного поля Земли от центрального;
- наличием атмосферы Земли;
- притяжением Луны, Солнца и планет Солнечной системы;
- давлением световых лучей и рядом других причин.

Эти силы называются возмущающими и вызывают отклонения реального движения КА от кеплеровского. Как правило, эти силы малы по сравнению с центральной силой притяжения, и это дает возможность предположить, что возмущенное движение отличается от невозмущенного движения лишь в количественном отношении, основные же закономерности движения остаются в силе.

Очевидно, что в каждом случае решения баллистических задач необходимо оценивать отклонения движения от кеплеровского.

На основании анализа влияния каждого возмущающего фактора на движение КА и конкретной целевой задачи выбираются система учитываемых сил и соответствующая физическая абстракция реальных тел, создающих возмущающие силы, которые в совокупности называются расчетными условиями. Расчетные условия определяют математическую модель возмущенного движения, а, следовательно, и расчетный вид траектории.

Для выбора расчетных условий необходимо проанализировать влияние различных возмущающих сил в зависимости от параметров орбит и выявить основные закономерности движения.

Данная задача решается с помощью методов исследования возмущенного движения КА.

4.5.1. Возмущающие воздействия

Движение неуправляемого космического аппарата под действием только центральной силы притяжения происходит в ограниченной области и подчиняется законам Кеплера при условии, что в каждой точке траектории выполняется неравенство

$$V^2 < \frac{2\mu}{r},$$

где V – абсолютная скорость движения аппарата; r – расстояние от него до центра притягивающей массы; μ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего тела.

В действительности, помимо центральной гравитационной силы, на траекторию такого аппарата оказывают влияние возмущающие воздействия, которые обуславливают отличие движения от кеплеровского. Возмущающие

силы неодинаковы по величине, из них могут быть выделены главные. Такими являются:

- нецентральность гравитационного поля;
- влияние окружающей среды;
- влияние давления солнечных лучей;
- влияние магнитных полей;
- релятивистский эффект.

Влияние нецентральности гравитационного поля

Нецентральность гравитационного поля, в котором движется КА или какой-либо другой космический объект, вызывается влиянием гравитационных полей других небесных тел и нецентральностью собственного поля Земли. Действие нецентральности земного гравитационного поля анализируется подробно ниже. Здесь же будут рассмотрены возмущения от влияния Луны и Солнца, ибо только их целесообразно рассматривать из влияний всего множества небесных тел.

Ускорения, соответствующие действию этих сил (в инерциальной геоцентрической системе координат), определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= fm_S \left(\frac{x_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{x_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{x_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{x_{TL}}{r_{TL}^3} \right); \\ \ddot{y} &= fm_S \left(\frac{y_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{y_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{y_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{y_{TL}}{r_{TL}^3} \right); \\ \ddot{z} &= fm_S \left(\frac{z_{KS}}{r_{KS}^3} - \frac{z_{TS}}{r_{TS}^3} \right) + fm_L \left(\frac{z_{KL}}{r_{KL}^3} - \frac{z_{TL}}{r_{TL}^3} \right),\end{aligned}$$

где m_S – относительная (по отношению к Земле) масса Солнца; m_L – относительная масса Луны. Индексы обозначают: K – КА, S – Солнце, L – Луна, T – Земля.

Эти возмущения приводят к вращению (так называемой прецессии) плоскости движения КА относительно полюса эклиптики с угловыми скоростями $\dot{\Omega}_S$ и $\dot{\Omega}_L$ и к изменению модуля фокального радиуса орбиты КА (δr_S и δr_L).

Для функций δr и $\delta \Omega$ могут быть даны следующие оценки (Евтушенко, Крылов и др. 1967). Для круговой орбиты, удаленной на 800 км от Земли (за один оборот):

$$\delta r_{S\max} = 25,6 \text{ см},$$

$$\delta r_{L\max} = 57,5 \text{ см}.$$

Суммарное отклонение за счет влияний Солнца и Луны за один оборот

$$\delta r_{L,S} < 83 \text{ см}.$$

При тех же условиях КА, удаленный на «суточную» орбиту (6,61 земных радиуса), испытывает возмущения:

$$\delta r_{S\max} = 783 \text{ м};$$

$$\delta r_{L\max} = 313 \text{ м};$$

$$\delta r_{L,S} < 1096 \text{ м}.$$

Скорость перемещения восходящего узла относительно полюса эклиптики

$$\dot{\Omega}_L = 0,63 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_S = 0,28 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1},$$

а относительно полюса мира

$$\dot{\Omega}_{L,S} = 0,835 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}.$$

Для КА, находящегося на «суточной» орбите, прецессия плоскости орбиты относительно полюса мира

$$\dot{\Omega}_L = 4,05 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_S = 10,2 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1};$$

$$\dot{\Omega}_{L,S} < 14 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}.$$

Для сравнения можно указать, что прецессия плоскости орбиты, вызванная первой степенью полярного сжатия Земли, в этом случае всего в два раза больше

$$\dot{\Omega}_T < 30 \cdot 10^{-10} \text{ с}^{-1}.$$

Прецессия плоскости орбиты относительно полюса эклиптики зависит от величины большой полуоси орбиты следующим образом:

$$\dot{\Omega}_T \sim a^{-\frac{7}{2}};$$

$$\dot{\Omega}_L \sim a^{-\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, $\dot{\Omega}_T = \dot{\Omega}_L$ на расстоянии, которое несколько больше семи радиусов Земли.

Возмущающее влияние Луны (а в общем случае, любого небесного тела) в некоторых случаях может существенно менять картину движения КА. Интересные результаты в этом смысле были получены М. Л. Лидовым (1961), наиболее важный из которых состоит в том, что при определенных наклонениях плоскости движения КА к плоскости движения возмущающего тела время существования спутника уменьшается. При указанном выше удалении (около 7 радиусов Земли) с этим влиянием уже нельзя не считаться в расчетах. Так, например, вследствие возмущающего влияния Луны время существования спутника «Эксплорер VI» (параметры орбиты: $a_0 = 43446$ км; $e_0 = 0,7604$; $i_0 = 47^\circ,10$) сократилось более чем в 10 раз. Фактическое определение эволюции орбиты спутника «Авангард 1» (параме-

тры: высота апогея над поверхностью Земли $h_a = 3948$ км; высота перигея $h_{\pi} = 658$ км; $i_0 = 34^\circ,3$; $e_0 = 0,19$; кеплеровский период обращения $T_k = 134^m,18$; вес $G = 2$ кг) за счет возмущающего влияния Солнца показало такие величины: $\dot{\Omega}_S = 0^\circ,18$ в год, $\delta r_S = 56,6$ см. Влияние Луны на эволюцию орбиты было в 2,2 раза больше.

Таким образом, пренебрегая возмущающим влиянием Луны и Солнца при рассмотрении КА, движущихся, например, в течение одних суток на среднем удалении от Земли (до 3000–4000 км от ее поверхности), ошибка в определении их положения будет составлять несколько сотен метров.

Для КА с апогеем около 40 000 км на этом же интервале времени ошибка будет достигать нескольких десятков километров (ошибка эта вызвана, главным образом, погрешностью в положении плоскости орбиты; ошибка за счет неточности определения величины фокального радиуса будет всего порядка километра).

Влияние атмосферы

В отличие от консервативного¹ влияния масс Луны и Солнца атмосфера оказывает на движение КА диссипативное действие. Энергия движущегося тела и его высота над Землей непрерывно уменьшаются, и оно, входя в плотные слои атмосферы, переходит на траекторию крутого снижения. Тормозящее влияние атмосферы характеризуется величиной ускорения, испытываемого телом, которое может быть вычислено по известной формуле

$$\bar{A} = -B\rho V_{\text{отн}}^2 \bar{V}_{\text{отн}}^\circ,$$

здесь $V_{\text{отн}}$ – скорость движения КА относительно среды; $\bar{V}_{\text{отн}}^\circ$ – орт вектора относительной скорости; ρ – массовая плотность среды;

$B = C_x S / 2m$ – баллистический коэффициент КА; C_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, зависящий от формы тела и условий обтекания; S – характерная площадь (например, площадь миделевого сечения), к которой отнесен коэффициент C_x ; m – масса тела.

Коэффициент аэродинамического сопротивления КА зависит от целого ряда факторов (геометрической формы объекта, его ориентации относительно вектора относительной скорости, температуры среды, условий взаимодействия молекул и атомов верхней атмосферы с поверхностью объекта и т. д.).

¹ Консервативной называется такая механическая система, полная энергия которой остается постоянной. Если потенциальная энергия системы u зависит только от координат (например: x, y, z), то силы в консервативной системе определяются в виде $F_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$ (это условие необходимо и достаточно). В отличие от консервативной в диссипативной системе полная механическая энергия непрерывно уменьшается (рассеивается), переходя в другие виды энергии (главным образом, в тепловую).

Баллистический коэффициент является исчерпывающей аэродинамической характеристикой космических объектов при движении в верхних слоях атмосферы.

В диапазоне высот до 300 км от поверхности Земли атмосфера является существенным фактором, влияющим на движение КА. В целом ряде случаев (особенно при изучении движения на сравнительно большом интервале времени) это воздействие должно приниматься во внимание. Естественно, что все вопросы, связанные с продолжительностью существования КА, обусловлены, в конечном счете, влиянием атмосферы. Вообще же необходимость учета ее влияния зависит от конкретной постановки и начальных условий каждой рассматриваемой задачи.

Влияние магнитных полей. Релятивистский эффект

Электрические системы, имеющиеся на КА, и вызываемое ими магнитное поле делают движение спутника чувствительным к действию магнитного поля Земли и к его местным случайным изменениям.

Так как явления, связанные с теорией относительности, становятся ощутимыми при скорости движения объекта, близкой к скорости света, то можно предполагать заранее, что релятивистский эффект скажется лишь незначительно при движении КА на сравнительно небольшом интервале времени. Для общности анализа, однако, рассмотрим это явление подробнее.

Релятивистский эффект при определении движения КА связан с тем обстоятельством, что траектория КА (запись уравнений движения, задание начальных условий) определяется известными сейчас способами в инерциальном галилеевом пространстве. В действительности согласно общей теории относительности всякая система координат, являющаяся инерциальной в рамках ньютоновской механики, при наличии гравитационных полей возмущается, то есть уже не будет галилеевой. Иными словами, геометрическое пространство искривляется вследствие наличия гравитирующих тел.

Гравитационные поля Земли и Солнца вызывают непрерывное вращение линии апсид орбиты КА в направлении его движения. Эффект этот пропорционален отношению V^2/C^2 (V – скорость движения КА в гравитационном поле, C – скорость света в пустоте), причем гравитационное влияние Солнца, помимо движения линии апсид, вызывает также смещение линии узлов.

Смещение перигея орбиты небесного тела (в угловых секундах в столетие) за счет гравитационного влияния Земли может быть определено из формулы

$$\Delta\omega_1 = 1,74 \cdot \frac{10^{25}}{a^2} (1 - e^2),$$

где a измеряется в сантиметрах.

Смещение перигея за счет гравитационного влияния Солнца ($\Delta\omega_2$) для близких космических объектов равно в среднем 1",9 в столетие. Смещение линии узлов (в угловых секундах в столетие) за счет гравитационного влияния Солнца может быть определено из формулы

$$\Delta\Omega = 1,67 \cdot \frac{10^{33}}{a^2} (1 - e^2).$$

В приведенной ниже табл. 4.2 (Евтушенко, Крылов и др. 1967) показано смещение линии апсид орбит КА (в угловых секундах в год) в зависимости от их расстояния до центра Земли (влияние только гравитационного поля Земли).

Таблица 4.2. Смещение линии апсид орбит КА

Среднее расстояние до центра Земли, см	Эксцентриситет орбиты e_0	Смещение линии апсид $\Delta\omega_1$
$r = r_{\text{Земли}} = 66367 \times 10^8$	0	17"
$r = r_{\text{Земли}} + 4 \times 10^7 = 8,77 \times 10^8$	0,01	14",5
$r = 10 \times 10^8$	0,25	5",866

Вторым релятивистским эффектом в движении искусственных спутников является смещение линии апсид, вызванное вращением гравитирующих тел (Земли и Солнца).

Влияние вращения Земли и Солнца может быть на один–два порядка меньше релятивистского эффекта, имеющего место при отсутствии вращения. Оба эти эффекта складываются алгебраически, причем учет вращения Земли и Солнца уменьшает общий релятивистский эффект.

Уравнения движения искусственного спутника Земли (КА) могут быть получены в рамках релятивистской механики. Однако вследствие их сложности и сравнительно небольшого отличия в описываемом ими движении по сравнению с движением в галилеевом пространстве использование их в настоящее время не является оправданным.

Влияния магнитного поля и релятивистского эффекта крайне малы и в большинстве задач движения искусственных спутников Земли ими можно пренебречь.

Влияние солнечной радиации

Явление солнечной радиации, то есть давление солнечных лучей, оказывает значительное возмущающее воздействие на движение космических объектов, у которых отношение площади поперечного сечения S к весу G достаточно велико, а именно:

$$S/G > 25 \text{ cm}^2/\text{g}.$$

Достаточно строгий расчет этого влияния осложняется тем, что космический объект часть времени движется в земной тени. Тем более сложно произвести его для КА, движущихся по эллиптическим орбитам.

Возмущающая сила, вызванная влиянием солнечной радиации в том случае, если КА освещен Солнцем или полностью затенен Землей (если пренебречь параллаксом, равным $11'$ на удалении 1600 км от Земли),

$$\bar{F} = F \cdot \bar{r}_S^\circ,$$

где \bar{r}_S° – орт направления на Солнце; $F = \gamma \cdot v \cdot \rho \cdot S$; S – эффективное поперечное сечение КА относительно направления \bar{r}_S° ; ρ – давление солнечной радиации вблизи Земли (эта величина равна примерно $(4,5 \times 10) \times 10^{-5}$ дин/см²); γ – коэффициент, зависящий от отражающих свойств поверхности КА; v – коэффициент, который равен единице, если КА освещен Солнцем, и равен нулю, если он находится в земной тени.

Давление солнечных лучей на КА, движущийся по круговой орбите, приводит к смещению геометрического центра орбиты. В результате этого уменьшается расстояние КА до Земли в той части траектории, где он удаляется от Солнца.

В качестве примера можно сказать, что если бы Солнце находилось в плоскости орбиты КА «Эхо-1» (параметры орбиты: $h_a = 1750$ км, $h_n = 1833$ км, наклонение 47° , период обращения $T = 121^m, 6$; $S/G = 125$ см²/г в начале вывода на орбиту), то геометрический центр орбиты смещался бы примерно на 7 км в сутки. Фактически скорость смещения по данным (Евтушенко, Крылов и др. 1967) составляла 2–3 км в сутки.

Путем сравнения возмущений, которые вызваны влиянием солнечной радиации и атмосферы Земли, получено, что на высотах более 900 км преобладает первое влияние, а на меньших высотах – второе.

При некоторых наклонениях (зависящих от радиуса орбиты) могут возникать под действием давления солнечных лучей резонансные явления. В этом случае элементы орбиты изменяются таким образом, что перигей всегда остается обращенным к Солнцу. Вследствие резонансных эффектов высота перигея орбиты уменьшается, и продолжительность существования КА (до момента входа в плотные слои атмосферы) может сократиться в десятки раз. Для КА «Эхо-1», в частности, это «резонансное» наклонение равно 35° .

Таким образом, явление солнечной радиации следует принимать во внимание при изучении движения на большом интервале времени КА с величиной отношения $S/G > 25$ см²/г.

Значительно более сильное возмущающее воздействие, по сравнению с рассмотренными выше, оказывает нецентральность земного гравитационного поля.

4.5.2. Фигура Земли

Поверхность Земли с ее низменностями, возвышенностями и горными складками имеет сложную геометрическую форму. Считается, что Земля принимает форму тела, ограниченного поверхностью океанов при полном равновесии находящихся в них водных масс (в штиль), продолженных под материками на уровне Мирового океана (рис. 4.2). Такое тело называют геоидом. В геометрическом смысле фигура геоида является неправильной и достаточно сложной, что очень усложняет математическое решение задач на его поверхности.

Поэтому действительную фигуру Земли приходится заменять телом, достаточно близким к геоиду, но более простым в геометрическом отношении. Первым приближением геоида может служить сфера с радиусом $R_z = 6371,210$ км. Теоретические и экспериментальные исследования показали, что в качестве более близкой по форме к геоиду фигуры может быть принят эллипсоид вращения с малым сжатием.

Одной из задач высшей геодезии является определение параметров такого эллипсоида вращения, для которого выполняются следующие условия:

- центр эллипсоида совпадает с центром масс Земли;
- плоскость экватора эллипсоида совпадает с плоскостью земного экватора (рис. 4.3);
- объем эллипсоида равен объему геоида;
- сумма квадратов отклонений поверхности эллипсоида от поверхности геоида является минимальной.

Такой эллипсоид называется общим земным эллипсоидом – ОЗЭ.

Под размерами эллипсоида в дальнейшем будем подразумевать экваториальную или большую полуось и полярное сжатие. В различных странах используются различные эллипсоиды, так называемые референц-эллипсоиды, отличающиеся от ОЗЭ. Это различие заключается в несовпадении размеров и центров, а условие минимума суммы квадратов отклонений по высоте вы-

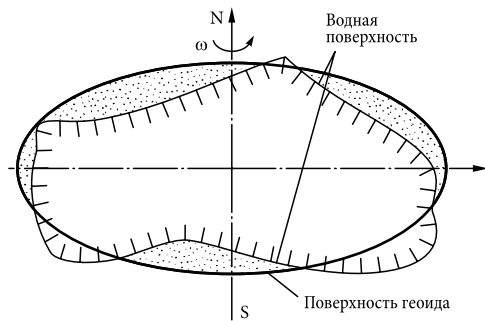


Рис. 4.2

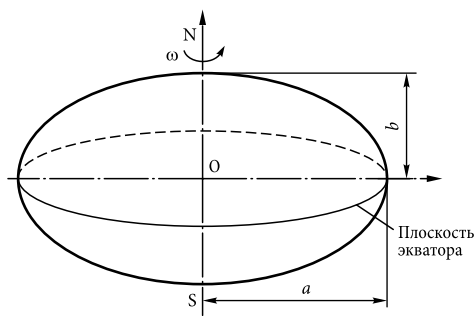


Рис. 4.3

полняется не для всей поверхности Земли, а только для той части, на которой были выполнены геодезические работы, результаты которых использованы для вывода его параметров.

В странах бывшего СССР используется референц-эллипсоид Красовского (ЭК) с размерами:

- большая полуось $a = 6378,245$ км;
- малая полуось $b = 6356,863$ км;
- полярное сжатие $\alpha = 0,00335233$.

Еще более совершенной моделью фигуры Земли является трехосный эллипсоид Красовского, размеры которого следующие (рис. 4.4):

- $a = 6379,351$ км;
- $b = 6356,863$ км;
- $c = 6378,139$ км;
- $\beta = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{3000}$.

Здесь β характеризует экваториальное сжатие эллипсоида. Из сравнения α и β видно, что полюсное сжатие на два порядка больше экваториального. Трехосный эллипсоид Красовского подобран из условия наилучшего приближения к геоиду. Зазор между ними не превышает 100 м.

4.5.3. Точка старта

Положение точки старта «0» на земной поверхности определяется (рис. 4.5):

- геодезической широтой точки старта на ЭК – B_0 ;
- геодезической долготой точки старта на ЭК – L_0 ;
- геодезической высотой точки старта на ЭК – H_0 .

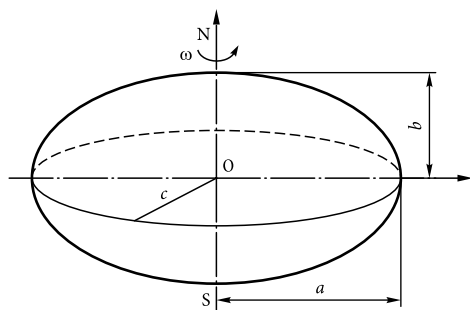


Рис. 4.4. Трехосный эллипсоид Красовского

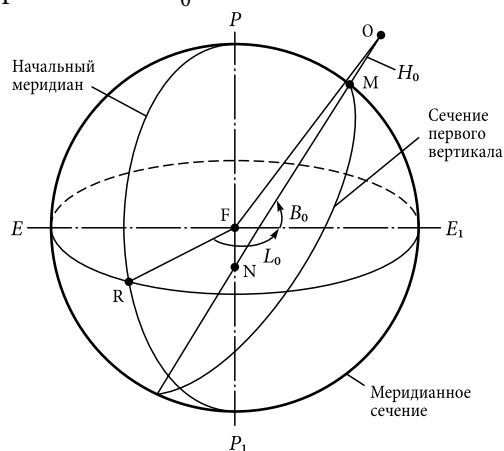


Рис. 4.5. Характеристики точки старта

Геодезической широтой точки старта «0» называется острый угол B_0 , образованный нормалью MN к поверхности эллипсоида в данной точке и плоскостью экватора ERE_1 . Геодезической долготой L_0 точки старта будем называть двугранный угол RFE_1 , образованный плоскостью меридиана данной точки и плоскостью начального меридиана PRP_1 . В качестве начального меридиана для счета долгот принят меридиан, проходящий через Гринвичскую обсерваторию. Геодезической высотой H_0 будем называть отрезок нормали OM к референц-эллипсоиду от данной точки Земли.

Главными нормальными сечениями эллипсоида вращения в некоторой точке M поверхности являются:

- меридианное сечение, проходящее через данную точку M и оба полюса эллипсоида P и P_1 (север-юг);
- сечение первого вертикала, проходящее через точку M и перпендикулярное к меридианному сечению.

Введем также понятие астрономических координат. Астрономическую широту определим как угол между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора. Соответственно астрономической долготой называется двугранный угол, образованный плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана, проходящей через отвесную линию в данной точке.

Астрономические широты и долготы определяют направление отвесной линии, т. е. направление реальной силы тяжести.

Угол между направлением отвесной линии и направлением нормали к поверхности эллипсоида принято называть отклонением. Отклонение отвесной линии данной точки определяется двумя величинами: проекцией полного отклонения на плоскость меридиана (слагающая отклонения в меридиане $\xi_{\text{и}}$) и первого вертикала (слагающая отклонения в первом вертикале $\eta_{\text{и}}$).

Астрономические координаты (φ , λ), а также астрономический азимут α (направление между точками земной поверхности относительно направления на северный полюс Земли – относительно плоскости меридиана данной точки) связаны с их геодезическими величинами (B_0 , L_0 , A_0) выражениями

$$\begin{aligned} B_0 &= \varphi - \xi_{\text{и}}; \\ L_0 &= \lambda - \eta_{\text{и}} \times \operatorname{cosec} \varphi; \\ A_0 &= \alpha - \eta_{\text{и}} \times \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned}$$

4.5.4. Потенциал силы тяжести

Изучение фигуры Земли неразрывно связано с исследованием ее гравитационного поля, характеризуемого потенциалом силы тяжести.

На некоторую материальную точку M поверхности Земли действуют две силы (рис. 4.6): сила земного притяжения f и центробежная сила q , направлен-

ная перпендикулярно к оси вращения FP , возникающая вследствие вращения Земли вокруг своей оси.

Сила притяжения f определяется распределением масс Земли и ее формой.

Центробежная сила q пропорциональна расстоянию ρ от оси вращения к квадрату угловой скорости ω_3 вращения Земли:

$$q = \rho \times \omega_3^2.$$

Равнодействующая этих двух сил называется силой тяжести. Последняя выражается векторной суммой

$$\bar{g} = \bar{f} + \bar{q}.$$

Сила тяжести характеризуется ускорением, которое приобретает свободно падающее тело. За единицу ускорения принимается Гал, определяемый соотношением

$$1 \text{ Гал} = 1 \text{ см/с}^2.$$

Выделим из общего потенциала силы тяжести «правильную часть», которая получила название **нормального потенциала**. Иначе говоря, нормальным потенциалом называют потенциал силы тяжести, по возможности близкий по своему значению к реальному потенциалу и просто вычисляемый. За нормальный потенциал принят потенциал эллипсоида вращения, имеющего массу, равную массе Земли, и вращающегося с той же угловой скоростью, что и реальная Земля. Разность реального и нормального потенциалов будем называть **возмущающим потенциалом**, для вычисления которого необходимо знание плотности в каждой точке Земли, что весьма затруднительно.

Отклонения действительного потенциала Земли от нормального, иначе называемые **аномалиями силы тяжести**, учитываются специальным распределением масс внутри Земли. Значения аномалий, как правило, даются в специальных каталогах и носят закрытый характер.

Действительная сила тяжести g отличается от нормальной по величине и направлению. Разность величин действительной и нормальной силы называется **аномалией силы тяжести**, а отличие направлений характеризуется **уклоном отвесной линии**.

Аномалии силы тяжести на поверхности Земли, как правило, составляют несколько десятков миллигалов, достигая нескольких сотен миллигалов в отдельных районах. Максимальные **уклонения отвеса** на поверхности Земли составляют ~ 1 угл. мин (Юзефович, Огородова 1980).

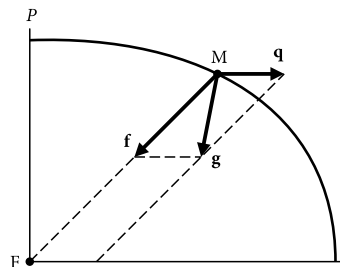


Рис. 4.6. Сила тяжести

При изучении движения КА на очень большом удалении от планет реальные притягивающие массы можно заменять материальными точками. Это допустимо, так как размеры притягивающих тел по сравнению с расстоянием до удаленного КА пренебрежимо малы. В тех случаях, когда полет КА длительное время происходит вблизи притягивающего тела или когда некоторые этапы полета выполняются в непосредственной близости от притягивающего центра (вывод КА на орбиту или спуск), расстояние от притягивающих тел до КА имеет один порядок с размерами самих притягивающих тел. В этом случае при точном решении задачи о полете КА притягивающие тела нельзя рассматривать как материальные точки и необходимо учитывать силовое воздействие на КА, обусловленное фигурой и распределением масс притягивающего центра.

Земля, как и любая другая планета, создает вокруг себя поле притяжения (гравитационное поле), которое и обуславливает силу притяжения (гравитационную силу) G . В гравиметрии поле притяжения, соответствующее общему земному эллипсоиду, называется нормальным, а отклонение фактического поля земного притяжения от нормального – полем аномалий земного притяжения.

Каждая точка гравитационного поля характеризуется вектором гравитационного ускорения \vec{j}_{gr} . Согласно второму закону Ньютона выражение для определения гравитационной силы имеет вид

$$\vec{G} = m \cdot \vec{j}_{gr},$$

где m – масса КА.

Свойство гравитационного поля создавать в каждой точке пространства определенное по величине и направлению ускорение математически описывается потенциальной функцией (потенциал силы притяжения).

Из теоретической механики известно, что сила притяжения является консервативной силой, а значит проекции этой силы на оси прямоугольной СК (O_3XYZ), жестко связанной с центром масс Земли, равны частным производным от потенциала сил притяжения по соответствующим координатам:

$$\begin{aligned} G_X &= \frac{\partial U}{\partial X}; \\ G_Y &= \frac{\partial U}{\partial Y}; \\ G_Z &= \frac{\partial U}{\partial Z}, \end{aligned}$$

где U – потенциал сил притяжения Земли; G_X , G_Y , G_Z – проекции вектора на оси координат.

Поделив G_X , G_Y , G_Z на массу КА, получим соотношения для вычисления проекций вектора гравитационного ускорения \vec{j}_{gr} на оси координат X , Y , Z :

$$j_X = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial X};$$

$$j_Y = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y};$$

$$j_Z = \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial Z}.$$

Таким образом, задача определения силы притяжения Земли или гравитационного ускорения будет решена, если известно выражение для потенциала сил притяжения.

Если представить Землю в форме шара с равномерным распределением плотности или шаровой симметрией, т. е. плотность изменяется только вдоль радиуса, то ее поле притяжения будет центральным, а потенциал силы притяжения внешней точки массы m , удаленной от центра Земли на расстояние r , может быть записан как

$$U = -\frac{\mu m}{r},$$

где $\mu = f \times M_3 = 398\,605 \text{ км}^3/\text{с}^2$ – постоянная поля притяжения Земли.

Проекция силы притяжения Земли, действующей на материальную точку массой m , на направление радиуса-вектора, соединяющего центр Земли с материальной точкой, вычисляется по формуле

$$G_{\text{центр}}(r) = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu m}{r^3}.$$

Знак минус показывает, что сила притяжения направлена в сторону, противоположную радиусу-вектору r . Разделив обе части этого выражения на m , получим проекцию вектора гравитационного ускорения $\vec{j}_{\text{гр}}$ на направление r :

$$\vec{j}_{\text{гр}} = -\frac{\mu}{r^3}.$$

В дальнейшем потенциал сил притяжения будем записывать для внешней материальной точки единичной массы. В этом случае производная от потенциала сил притяжения по какому-либо направлению будет равна проекции гравитационного ускорения на это направление.

Если представить форму Земли эллипсоидом вращения, а он является осесимметричным телом, причем осью симметрии является малая ось, то вектор гравитационного ускорения $\vec{j}_{\text{гр}}$ лежит в меридиональной плоскости и отклонен от радиуса r в сторону экватора, за исключением случаев, когда материальная точка находится в экваториальной плоскости или на линии, соединяющей полюса (рис. 4.7).

Задача определения потенциала сил притяжения тела, не являющегося однородным шаром или не обладающего шаровой симметрией, достаточно

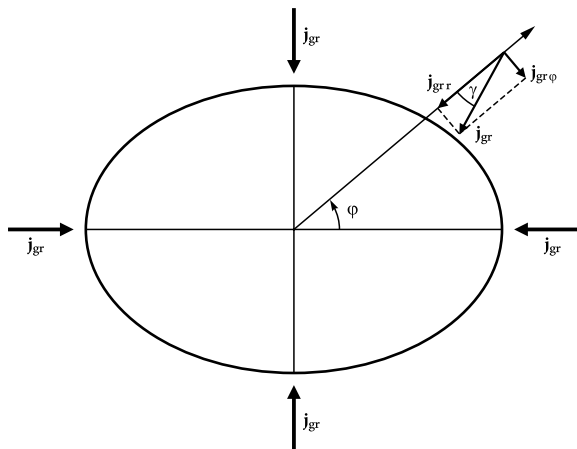


Рис. 4.7

сложна. В общем случае потенциал сил притяжения поля Земли для точки с единичной массой ($m = 1$) представляется в виде интеграла

$$U = f \cdot \int_0^{M_3} \frac{dm}{r}, \quad (4.1)$$

где $f = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{гс}^2$ – постоянная всемирного тяготения; dm – элементарная масса Земли; M_3 – общая масса Земли; r – расстояние между элементарной массой Земли и выбранной точкой поля.

В связи с тем, что Земля имеет сложную форму и неоднородна по плотности, интеграл (4.1) можно вычислить только приближенно путем представления его, например, в виде бесконечного ряда функций. В случае использования сферических координат точки поля – r , φ , λ такое представление будет иметь вид

$$U(r, \varphi, \lambda) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\left(\frac{R_E}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) \cdot P_{nm}(\sin \varphi) \right),$$

где R_E – экваториальный радиус Земли, равный 6378,16 км; r , φ , λ – геоцентрические координаты (радиус, широта, долгота) точки, в которой измеряется сила притяжения; C_{nm} , d_{nm} – безразмерные коэффициенты разложения, определяемые из гравиметрических данных, а также по наблюдениям за движением искусственных спутников Земли; P_{nm} – многочлен Лежандра степени n и порядка m .

Члены разложения $P_{nm}(\sin \varphi) \cdot \cos(m\lambda)$ и $P_{nm}(\sin \varphi) \cdot \sin(m\lambda)$ называются элементами гармоник:

- зональными, если $m = 0$, в этом случае учитываются только широтные эффекты поля притяжения Земли;

- секториальными или долготными, если $m = n$, описывают воздействие только долготных эффектов;
- тессеральными, если $m \neq n$, отражают смешанные эффекты как от широты, так и от долготы местоположения КА.

При расчетах эти функции удобно определять с использованием рекуррентных зависимостей:

$$P_{nm} = \frac{(2n-1)\sin\varphi P_{n-1,m} - (n+m+1)P_{n-2,m}}{n-m}, \text{ если } m < n,$$

$$P_{nm} = (2n-1)P_{n-1,m-1}\cos\varphi, \text{ если } n = m.$$

Первые три зависимости, необходимые для начала расчета по этой формуле, имеют вид

$$P_{00} = 1, P_{10} = \sin\varphi, P_{11} = \cos\varphi.$$

Для кратных тригонометрических функций

$$\sin m\lambda = \sin\lambda \cos(m-1)\lambda + \cos\lambda \sin(m-1)\lambda;$$

$$\cos m\lambda = \cos\lambda \cos(m-1)\lambda - \sin\lambda \sin(m-1)\lambda.$$

Схемы изменения знаков на сфере, даваемые этими гармониками, приведены на рис. 4.8.

При решении задач, связанных с движением ракет-носителей и полетами КА различного целевого назначения, выбирают такую математическую модель фигуры Земли, которая обеспечивает учет силы притяжения Земли с заданной точностью.

Рассмотрим зависимости притяжения Земли от формы ее поверхности. Будем аппроксимировать геоид (а, следовательно, и его гравитационное поле) физически реальными телами. Такие приближенные представления Земли и ее гравитационного поля назовем моделями.

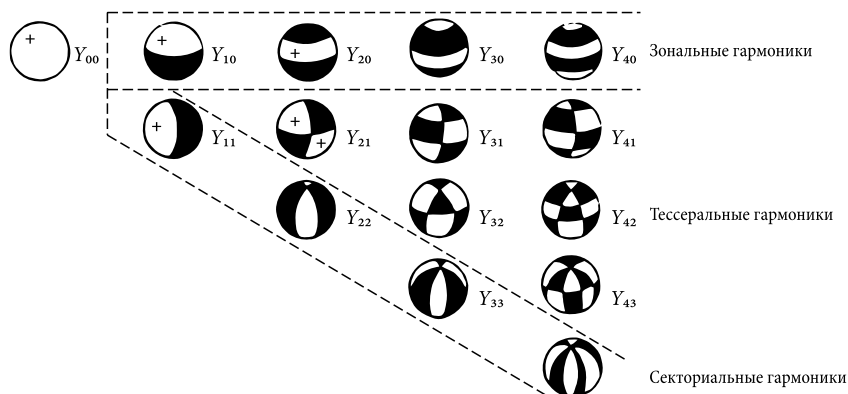


Рис. 4.8. Схемы изменения знаков на сфере

Сферическая Земля

Потенциал гравитационного поля

$$U = \frac{\mu}{r}.$$

Эта модель характеризует центральное гравитационное поле Земли. Движение центра масс КА в таком поле описывается наиболее просто. Траекториями движения материальной точки в поле центральной силы являются кривые второго порядка (окружность, эллипс, парабола, гипербола), причем вид траектории зависит от начальных условий (для КА – от значения параметров движения в конце участка выведения). Движение КА в центральном гравитационном поле называют кеплеровским.

Сфероидальная Земля

Потенциал гравитационного поля для такой модели имеет вид

$$U = \frac{\mu}{r} \left(1 + C_{20} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 P_{20}(\sin \varphi) \right),$$

где $C_{20} = -0,00109808$ – коэффициент, пропорциональный полярному сжатию Земли. Поэтому это выражение представляет собой потенциал гравитационного поля эллипсоида вращения, квадратом сжатия которого можно пренебречь. Такой эллипсоид, мало отличающийся от сферы, называют сфероидом. Полином Лежандра равен

$$P_{20}(\sin \varphi) = \frac{1}{2} (3 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) - 1).$$

Максимальное отличие сфероида от сферы пропорционально сжатию $\alpha = 1/208,2$ и равно 21 км. В тех задачах, где изучается движение КА на интервале нескольких оборотов, эта модель часто обеспечивает требуемую точность решения.

Трехосный несимметричный эллипсоид

Потенциал гравитационного поля

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \left[C_{20} P_{20}(\sin \varphi) + (C_{22} \cos 2\lambda + d_{22} \cdot 2 \sin \lambda) P_{22}(\sin \varphi) \right] + \right. \\ \left. \left(\frac{R_E}{r} \right)^3 C_{30} P_{30}(\sin \varphi) + \left(\frac{R_E}{r} \right)^4 C_{40} P_{40}(\sin \varphi) \right\}.$$

Это наиболее полная из рассматриваемых моделей и лучше всех остальных приближается к геоиду. Здесь присутствуют все главные члены разложения гравитационного потенциала.

Следует отметить, что при решении некоторых задач, связанных с длительными полетами КА и необходимостью долгосрочного прогнозирования движения КА, используют более полную модель гравитационного поля Земли, учитывая коэффициенты разложения до шестой зональной гармоники включительно, а иногда и выше.

4.6. Ошибки подготовки геодезических и гравиметрических данных

Одним из факторов, влияющих на точность выведения КА, являются ошибки определения исходных астрономо-геодезических и гравиметрических данных, используемых при расчете полетного задания, прицеливания и проверке приборов системы управления РН.

Всю совокупность этих ошибок принято делить на следующие три группы:

1. Ошибки данных, определяемых на стартовых и технических позициях.
2. Ошибки определения координат точек прицеливания.
3. Ошибки данных, характеризующих потенциал силы тяжести общего земного эллипсоида.

К первой группе относятся ошибки определения следующих данных:

- координат точки старта (широта B_0 , долгота L_0 и высота H_0 на эллипсоиде Красовского – референц-эллипсоиде);
- абсолютного значения ускорения силы тяжести g_0 в точке старта и на технической позиции;
- слагающих уклонения отвесной линии в плоскости меридиана и первого вертикала $\xi_{и'}$, $\eta_{и'}$;
- азимута базового направления A_6 для оптического прицеливания.

При этом под точкой старта понимается точка продольной оси ракеты на уровне приборного отсека.

Ко второй группе относятся ошибки определения координат точек прицеливания (широта $B_{ц}$, долгота $L_{ц}$ и высота $H_{ц}$ на эллипсоиде Красовского).

При этом под точкой прицеливания понимается точка физической поверхности Земли.

К третьей группе относятся аномалии гравитационного поля Земли Δg_i .

Глава 5

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫВЕДЕНИЯ

5.1. Математическая модель возмущенного движения РН

5.1.1. Системы координат

При описании математической модели возмущенного движения РН используются следующие правые прямоугольные системы координат.

Абсолютная геоцентрическая система координат $O_a, \xi_a, \eta_a, \zeta_a$ (АГСК).

Начало системы координат расположено в центре общего земного эллипсоида (рис. 5.1). В момент старта ($t = 0$) ось $O_a \xi_a$ направлена по вектору угловой скорости вращения Земли (Ω_3); ось $O_a \eta_a$ направлена в точку пересечения нулевого (гринвичского) меридиана с экватором. Далее система координат сохраняет неизменное положение относительно инерциального пространства.

Начальная стартовая система координат $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ (НССК).

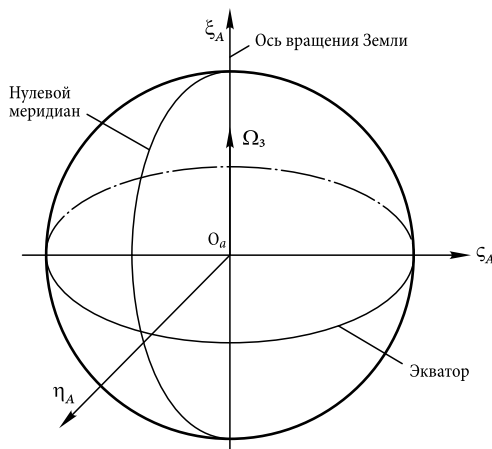


Рис. 5.1. Абсолютная геоцентрическая СК

Начало системы координат задается геодезическими координатами точки старта относительно эллипсоида Красовского: широтой B_0 , долготой L_0 , высотой H_0 . В момент старта ось O_0X_0 образует с направлением на север угол, равный геодезическому азимуту прицеливания; ось O_0Y_0 направлена вверх по нормали к эллипсоиду Красовского. Далее система координат сохраняет неизменное положение относительно инерциального пространства.

Начальная стартовая уклоненная система координат $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$ (НС УСК).

Отличается от начальной стартовой тем, что ось $O_{и}Y_{и}$ направлена вверх по линии отвеса, а ось $O_{и}X_{и}$ образует с направлением на север астрономический азимут α .

Приборная система координат $O_nX_nY_nZ_n$ (ПСК).

Начало системы координат расположено в центре пересечения осей карданного подвеса гиросtabilизатора. Ось O_nX_n направлена по оси рыскания; ось O_nY_n – по оси вращения; а ось O_nZ_n – по оси тангажа ГСП. В момент старта плоскость $O_nX_nY_n$ может быть развернута относительно плоскости $O_{и}X_{и}Y_{и}$ начальной стартовой уклоненной системы координат на угол χ .

Акселерометрическая система координат $O_jX_jY_jZ_j$ (АСК) связана с j -м акселерометром. Начало системы координат расположено в центре пересечения измерительной оси O_jX_j с осью подвеса O_jY_j маятника акселерометра (рис. 5.2). Плоскости $O_jX_jY_j$ и $O_jX_jZ_j$ развернуты относительно плоскостей $O_nX_nY_n$ и $O_nX_nZ_n$ приборной системы координат на углы α_y и α_z .

Связанная с гироблоком система координат $O_{г}X_{г}Y_{г}Z_{г}$ (СГСК).

Начало системы координат расположено в центре пересечения оси чувствительности $O_{г}X_{г}$ с осью подвеса $O_{г}Z_{г}$ (рис. 5.3). Оси чувствительности гироблоков рыскания (ГБР) и вращения (ГБВ) взаимно перпендикулярны и развернуты относительно приборной системы координат на угол ϕ_p . Ось подвеса гироблока тангажа (ГБТ) развернута относительно оси O_nX_n приборной системы координат на угол ϕ_T .

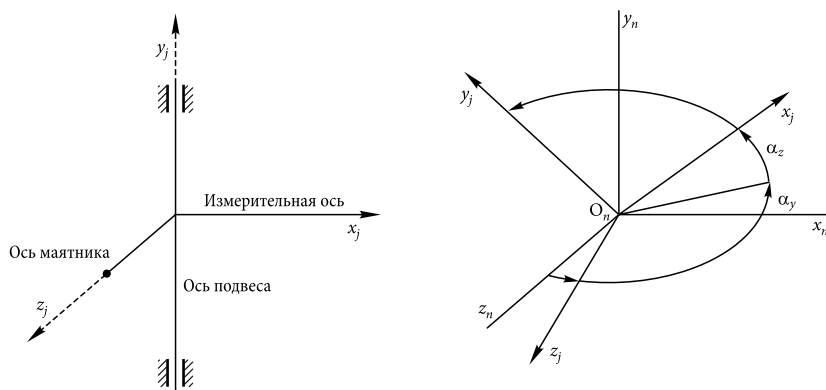


Рис. 5.2. Акселерометрическая СК

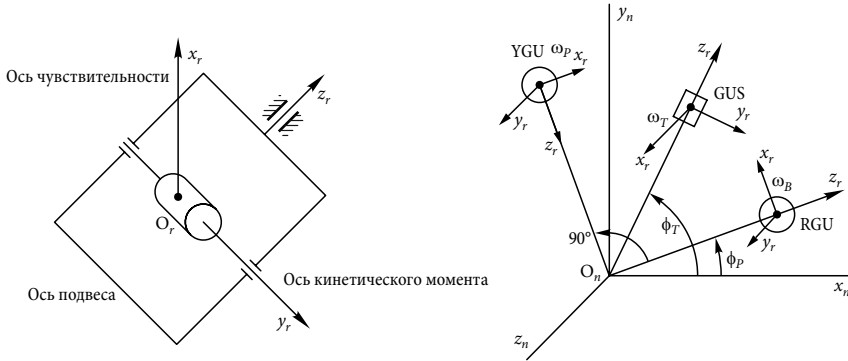


Рис. 5.3. Связанная с гириблоком СК

Связанная с РН система координат $O_1X_1Y_1Z_1$ (ССК).

Начало системы координат расположено в центре масс РН. Ось O_1X_1 направлена по продольной оси РН. Ось O_1Y_1 лежит в плоскости стабилизации I-III. Оси связанной системы координат образуют с осями начальной стартовой системы координат баллистические углы рыскания ψ , тангажа ϑ и вращения φ .

5.1.2. Матрицы направляющих косинусов

Матрица $|a|$ – переход от акселерометрической системы к приборной

	X_n	Y_n	Z_n
X_j	$\cos\alpha_y \cos\alpha_z$	$\sin\alpha_z$	$-\cos\alpha_z \sin\alpha_y$
Y_j	$-\cos\alpha_y \sin\alpha_z$	$\cos\alpha_z$	$\sin\alpha_z \sin\alpha_y$
Z_j	$\sin\alpha_y$	0	$\cos\alpha_y$

Матрица $|c|$ – переход от начальной стартовой системы координат к абсолютной геоцентрической

	ξ_a	η_a	ζ_a
X_0	$\cos A_0 \cos B_0$	$-\cos A_0 \sin B_0 \cos L_0 - \sin A_0 \sin L_0$	$-\cos A_0 \sin B_0 \sin L_0 + \sin A_0 \cos L_0$
Y_0	$\sin B_0$	$\cos B_0 \cos L_0$	$\cos B_0 \sin L_0$
Z_0	$-\sin A_0 \cos B_0$	$\sin A_0 \sin B_0 \cos L_0 - \cos A_0 \sin L_0$	$\sin A_0 \sin B_0 \sin L_0 + \cos A_0 \cos L_0$

Матрица $|d|$ – переход от связанной системы координат к начальной стартовой

	X_0	Y_0	Z_0
X_1	$\cos\vartheta \cos\psi$	$\sin\vartheta$	$-\cos\vartheta \sin\psi$
Y_1	$-\cos\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi$	$\cos\varphi \cos\vartheta$	$\cos\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi$
Z_1	$\sin\varphi \sin\vartheta \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi$	$-\sin\varphi \cos\vartheta$	$-\sin\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi$

5.1.3. Возмущенные уравнения движения центра масс ракеты

В векторной форме уравнения движения центра масс РН имеют следующий вид:

$$\dot{\vec{V}} - \vec{g}(\vec{R}) = \dot{\vec{W}},$$

где $\dot{\vec{V}}$, \vec{g} , \vec{R} , $\dot{\vec{W}}$ – векторы действительного и гравитационного ускорений, радиус-вектор и вектор кажущегося ускорения соответственно.

Приведенное векторное уравнение можно представить тремя скалярными, спроектировав его на оси произвольно выбранной системы координат, связанной с центром масс РН.

Значения кинематических параметров движения центра масс РН в АГСК на момент сброса отделяющихся частей РН могут быть определены путем численного интегрирования системы уравнений движения РН:

$$\dot{V}_{\xi a} = \dot{W}_{\xi a} + g_{\xi a};$$

$$\dot{V}_{\eta a} = \dot{W}_{\eta a} + g_{\eta a};$$

$$\dot{V}_{\zeta a} = \dot{W}_{\zeta a} + g_{\zeta a};$$

$$\dot{\xi}_a = V_{\xi a};$$

$$\dot{\eta}_a = V_{\eta a};$$

$$\dot{\zeta}_a = V_{\zeta a}.$$

$$\begin{vmatrix} \dot{W}_{\xi a} \\ \dot{W}_{\eta a} \\ \dot{W}_{\zeta a} \end{vmatrix} = |c| \begin{vmatrix} \dot{W}_{x0} + \Delta_t \dot{W}_{x0} \\ \dot{W}_{y0} + \Delta_t \dot{W}_{y0} \\ \dot{W}_{z0} + \Delta_t \dot{W}_{z0} \end{vmatrix};$$

$$g_{\xi a} = -g_r \sin \varphi_c - g_\omega + \Delta g_\xi;$$

$$g_{\eta a} = -g_r \cos \varphi_c \cos \lambda + \Delta g_\eta \cos \Omega_3 t - \Delta g_\zeta \sin \Omega_3 t;$$

$$g_{\zeta a} = -g_r \cos \varphi_c \sin \lambda + \Delta g_\eta \sin \Omega_3 t + \Delta g_\zeta \cos \Omega_3 t;$$

$$g_r = \frac{b_0}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{b_2}{r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi_c) + \frac{15}{8} \frac{b_4}{r^6} (21 \sin^4 \varphi_c - 14 \sin^2 \varphi_c + 1);$$

$$g_\omega = 3 \frac{b_2}{r^4} \sin \varphi_c - \frac{5}{2} \frac{b_4}{r^6} \sin \varphi_c (7 \sin^2 \varphi_c - 3);$$

$$\sin \varphi_c = \frac{\xi_a}{r}; \quad \cos \varphi_c = \frac{\eta_a}{r};$$

$$\sin \lambda = \frac{\zeta_a}{r_a}; \quad \cos \lambda = \frac{\eta_a}{r_a};$$

$$r^2 = \xi_a^2 + \eta_a^2 + \zeta_a^2;$$

$$r_a^2 = \xi_a^2 + \zeta_a^2,$$

где $|c|$ – матрица перехода от начальной стартовой системы координат к абсолютной геоцентрической; \dot{W}_{x0} , \dot{W}_{y0} , \dot{W}_{z0} – проекции вектора номинального кажущегося ускорения на оси начальной стартовой системы координат; $\Delta_t \dot{W}_{x0}$, $\Delta_t \dot{W}_{y0}$, $\Delta_t \dot{W}_{z0}$ – проекции вектора приращения кажущегося ускорения за счет ошибок СУ; b_0 , b_2 , b_4 – коэффициенты разложения потенциала земного притяжения в ряд; Δg_ξ , Δg_η , Δg_ζ – аномалии гравитационного поля Земли; Ω_3 – угловая скорость вращения Земли.

Расчет возмущенных и номинальных значений кинематических параметров движения проводится в абсолютной геоцентрической системе координат с последующим их пересчетом в любую другую удобную систему координат.

5.1.4. Математическая модель погрешностей инерциальной СУ

Ошибки измерения j -го акселерометра

$$\Delta_t \dot{W}_j = g_0 n_{tj} + \dot{W}_{xj} n_{mj} + \dot{W}_{zj} \Delta a_{yj} + \dot{W}_{yj} \Delta a_{zj} + \dot{W}_{xj} n_j,$$

где g_0 – модуль гравитационного ускорения в месте проведения калибровки акселерометра; \dot{W}_{xj} , \dot{W}_{yj} , \dot{W}_{zj} – проекции вектора кажущегося ускорения РН по направлению осей акселерометрической системы координат.

Ошибки угловой ориентации ГСП

– относительно оси рыскания

$$\Delta_t P = 0 - \Delta \xi_u \sin A_0 + \Delta \eta_u \cos A_0 + \int_0^t (\omega_p \cos \phi_p - \omega_B \sin \phi_p) dt;$$

– относительно оси вращения

$$\Delta_t \varphi = \varphi_0 + \Delta \eta_u \operatorname{tg} B_0 + \int_0^t (\omega_p \sin \phi_p + \omega_B \cos \phi_p) dt;$$

– относительно оси тангажа

$$\Delta_t T = \vartheta_0 + \Delta \xi_u \cos A_0 - \Delta \eta_u \sin A + \int_0^t \omega_T dt,$$

здесь ω_p , ω_B , ω_T – скорости ухода гироскопов рыскания, вращения и тангажа; $\Delta \xi_u$, $\Delta \eta_u$ – ошибки определения слагающих уклонов отвесной линии.

Уходы j -го гироскопа

$$\omega_j = P_{tj} + P_{gkj} \times \dot{W}_{Xzj}/g_{0j} + P_{gzj} \times \dot{W}_{Yzj}/g_{0j},$$

где \dot{W}_{Xzj} , \dot{W}_{Yzj} – проекции вектора кажущегося ускорения РН на направления осей связанной с гироскопами системы координат.

Приращения кажущегося ускорения в приборной системе координат за счет инструментальных погрешностей СУ определяются как

$$\begin{aligned}\Delta_t \dot{W}_{xn} &= -\dot{W}_{yn} \times \Delta_t T + \dot{W}_{zn} \times \Delta_t B + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{xj}; \\ \Delta_t \dot{W}_{yn} &= \dot{W}_{xn} \times \Delta_t T - \dot{W}_{zn} \times \Delta_t P + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{yj}; \\ \Delta_t \dot{W}_{zn} &= -\dot{W}_{xn} \times \Delta_t B + \dot{W}_{yn} \times \Delta_t P + \sum_{j=1}^3 \Delta_t \dot{W}_{zj},\end{aligned}$$

где $\Delta_t \dot{W}_{xn}$, $\Delta_t \dot{W}_{yn}$, $\Delta_t \dot{W}_{zn}$ – отклонения кажущегося ускорения в проекциях на оси приборной системы координат за счет ошибок измерения трех акселерометров (α , β , γ – условное обозначение), информация которых используется в навигационной задаче наведения.

Приращения кажущегося ускорения $\Delta_t \dot{W}_{xn}$, $\Delta_t \dot{W}_{yn}$, $\Delta_t \dot{W}_{zn}$ определяются решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\alpha + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\alpha + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\alpha &= \Delta_t \dot{W}_\alpha; \\ \Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\beta + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\beta + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\beta &= \Delta_t \dot{W}_\beta; \\ \Delta_t \dot{W}_{xj} \times a_{11}^\gamma + \Delta_t \dot{W}_{yj} \times a_{12}^\gamma + \Delta_t \dot{W}_{zj} \times a_{13}^\gamma &= \Delta_t \dot{W}_\gamma,\end{aligned}$$

где a_{11}^α , a_{11}^β , a_{11}^γ – компоненты матрицы $|a|$ соответственно для акселерометров α , β , γ .

Ошибки значений координат точки старта пусковой установки учитываются при расчете начальных условий интегрирования ($V_{\xi a}^0$, $V_{\eta a}^0$, $V_{\zeta a}^0$, ξ_a^0 , η_a^0 , ζ_a^0) и как ошибка угловой ориентации стабилизированной платформы ($\Delta_t P$, $\Delta_t B$, $\Delta_t T$) на момент старта.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} V_{\xi a}^0 \\ V_{\eta a}^0 \\ V_{\zeta a}^0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega_3 \zeta_a^0 \\ \Omega_3 \eta_a^0 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \xi_a^0 \\ \eta_a^0 \\ \zeta_a^0 \end{vmatrix} &= (N_0 + H_0 + \Delta H_0) \cdot \begin{vmatrix} \sin(B_0 + \Delta B_0) \\ \cos(B_0 + \Delta B_0) \cdot \cos(L_0 + \Delta L_0) \\ \cos(B_0 + \Delta B_0) \cdot \sin(L_0 + \Delta L_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^2 N_0 \sin(B_0 + \Delta B_0) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \\ N_0 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(B_0 + \Delta B_0)}};\end{aligned}$$

$$\Delta_t P = \Delta B_0 \sin A_0 + \Delta L_0 \cos A_0 \cos B_0;$$

$$\Delta_t B = \Delta L_0 \sin B_0;$$

$$\Delta_t T = -\Delta B_0 \cos A_0 - \Delta L_0 \sin A_0 \cos B_0,$$

где A_0 – азимут выставки платформы; a , e^2 – параметры фигуры Земли (большая полуось и сжатие); B_0 , L_0 , H_0 , ΔB_0 , ΔL_0 , ΔH_0 – широта, долгота, высота точки старта и точность их определения соответственно.

5.1.5. Отклонения за счет процесса отделения

Возмущения, действующие после команды на выключение двигателя, учитываются в виде приращений составляющих скорости и координат на момент отделения КА (ОЧ)

$$\begin{vmatrix} V_{\xi a}^B \\ V_{\eta a}^B \\ V_{\zeta a}^B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{\xi a}^H \\ V_{\eta a}^H \\ V_{\zeta a}^H \end{vmatrix} + (\Delta V x_0^y + \delta V_{x_0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix} + (\Delta V y_0^y + \delta V_{y_0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{vmatrix} + (\Delta V z_0^y + \delta V_{z_0}) \cdot \begin{vmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \xi_a^B \\ \eta_a^B \\ \zeta_a^B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_a^H \\ \eta_a^H \\ \zeta_a^H \end{vmatrix} + \Delta X_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{vmatrix} + \Delta Y_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{vmatrix} + \Delta Z_0^y \cdot \begin{vmatrix} c_{31} \\ c_{32} \\ c_{33} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \delta V_{x_0} \\ \delta V_{y_0} \\ \delta V_{z_0} \end{vmatrix} = \Delta V_{x_1} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{vmatrix} + \Delta V_{y_1} \cdot \begin{vmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{vmatrix} + \Delta V_{z_1} \cdot \begin{vmatrix} d_{31} \\ d_{32} \\ d_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta V_{x_1} = \frac{\Delta I_{\text{пд}}}{m} + \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot \Delta V_{\text{отд}}^{\text{отн}},$$

$$\Delta V_{y_1} = \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot V_{\text{отд}}^{\text{отн}} \cdot \Delta \vartheta_{\text{отд}};$$

$$\Delta V_{z_1} = \frac{m_{\text{оч}}}{m} \cdot V_{\text{отд}}^{\text{отн}} \cdot \Delta \psi_{\text{отд}},$$

где m , $m_{\text{оч}}$ – массы РН, отделяющейся части РН на момент выключения двигателя; c_{ij} , d_{ij} – компоненты матрицы $|c|$, $|d|$; $V_{\text{отд}}^{\text{отн}}$, $\Delta V_{\text{отд}}^{\text{отн}}$ – относительная скорость отделения КА от РН и её разброс; $\Delta \vartheta_{\text{отд}}$, $\Delta \psi_{\text{отд}}$ – ошибки стабилизации; $\Delta V x_0^y, \Delta V y_0^y, \Delta V z_0^y, \Delta X_0^y, \Delta Y_0^y, \Delta Z_0^y$ – динамические ошибки.

5.1.6. Рассеивание неуправляемого участка

Параметры движения ОЧ и рассеивание точек падения за счет возмущений на атмосферном участке нисходящей ветви траектории зависят в основном от следующих факторов:

- условий входа центра масс ОЧ в атмосферу (скорости и угла наклона вектора скорости к местному горизонту);
- величины предельного угла атаки при входе в атмосферу;
- характеристик ОЧ (аэродинамических, весовых, геометрических и центровочных);
- параметров атмосферы (плотность, давление, температура, ветер).

Исследование этих зависимостей дает возможность сформировать требования к условиям входа в атмосферу и характеристикам ОЧ.

Расчет рассеивания ОЧ на атмосферном участке проводится с использованием уравнений пространственного движения неуправляемого объекта, принятых в баллистике при расчете попадающей траектории и оценке предельных режимов полета.

Выходной величиной этих расчетов является суммарный промах ракеты за счет возмущений атмосферного участка, представленный как функция угла входа ОЧ в атмосферу и скорости входа:

$$\Delta_{\text{атм}} = f(\vartheta_{\text{вх}} \text{ при } V_{\text{вх}} = \text{const}).$$

5.2. Анализ ошибок

Анализ ошибок проводится с целью количественной оценки точности системы и оптимизации конструкции системы управления.

Основные причины ошибок инерциального управления РН можно разбить на несколько категорий:

- 1) ошибки измерений ускорений (инструментальные ошибки);
- 2) ошибки приборной реализации уравнений (методические ошибки активного участка траектории) и ошибки вычислений;
- 3) ошибки управления;
- 4) ошибки отсечки тяги;
- 5) гравитационные аномалии;
- 6) ошибки при движении КА в атмосфере.

Первая категория содержит те ошибки, которые определяют способность инерциальной системы точно измерять скорость объекта. Эта категория включает ошибки гироскопов, акселерометров и ошибки начального ориентирования, т. е. те ошибки, которые обычно являются определяющими при оценке точности системы.

Вторая категория содержит ошибки, связанные с бортовой вычислительной аппаратурой и уравнениями управления, которые она реализует. Существенные ошибки возникают при упрощении СУ.

Третья категория включает ошибки, связанные со способностью РН следовать управляющим сигналам (динамические ошибки).

Четвертая категория связана с выключением двигательной установки.

Пятая категория содержит ошибки, возникающие в связи с неполным знанием гравитационных сил, действующих на РН и КА.

Шестая категория содержит ошибки, вызванные нестандартным профилем параметров атмосферы, ветрами, а также разбросами характеристик КА.

Основная цель анализа ошибок – оценить количественное влияние каждой причины ошибок на точность системы.

Инерциальным системам присущи ошибки измерений по следующим обстоятельствам:

- неспособность акселерометра точно воспринять изменение скорости объекта вдоль входной оси (оси чувствительности);
- несовпадение входной оси акселерометров с принятой измерительной осью.

Первое обстоятельство полностью определяется эксплуатационными характеристиками акселерометра.

Второе обстоятельство – функция ухода гироскопа и ошибок начального ориентирования платформы (установка акселерометров). Несовпадение входной оси с принятой измерительной осью приводит к тому, что акселерометр чувствует компоненту ускорения в перпендикулярном направлении, чем и объясняется ошибка в определении скорости.

Количественная оценка влияния каждой исходной ошибки на точность системы обычно выполняется в три этапа.

Первый этап включает построение модели ошибок гироскопа, акселерометра и платформы. Эта модель позволяет математически определить ошибки характеристик в функции от таких переменных, как ускорение, время, температура и т. д.

Второй этап заключается в вычислении влияния каждого из членов модели ошибок на точность информационных измерений. Результирующая ошибка в скорости и координатах объекта обычно определяется для момента прекращения работы ракетного двигателя.

Третий этап состоит в экстраполяции ошибок скорости и координат объекта в конце активного участка в ошибки скорости и координат объекта в точке цели.

Исследование уравнений ошибок, данных в разд. 3.4, показывает, что точность системы зависит как от величины коэффициента ошибок, так и от профиля приложенного ускорения объекта. Прямой подход к повышению точности систем обычно заключается в конструировании таких приборов, в которых каждый коэффициент ошибок сведен до минимума.

Более тонкое и более эффективное решение связано с уменьшением чувствительности ошибок полета от исходных ошибок. Это может быть достигнуто выбором оптимального ориентирования осей гироскопов и акселерометров относительно расчетной траектории полета. Так, в целях минимизации ошибок выведения на ракетах реализуется предстартовый разворот

гироблока тангажа на величину угла $\vartheta = \arctg \frac{W_{y_0}(t_k)}{W_{x_0}(t_k)}$

и разворот гиросtabilизированной платформы по азимуту на величину угла

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{W_{z_0}(t_k)}{W_{x_0}(t_k)},$$

где $W_{x_0}(t_k)$, $W_{y_0}(t_k)$, $W_{z_0}(t_k)$ – проекции вектора кажущейся скорости в начальной стартовой системе координат на момент выключения двигателя (отделения КА).

Такой же эффект достигается путем ввода разрывных участков траектории (участков свободного полета в схеме полета с многократным включением двигателей). Введение разрывных участков разной продолжительности обеспечивает разные соотношения проекций вектора кажущейся скорости на оси приборной системы координат, что позволяет минимизировать влияние ошибок инерциального управления на отклонение контролируемого параметра.

Для баллистических ракет, особенно твердотопливных, остро ставится вопрос обеспечения приемлемого рассеивания за счет выключения двигателя.

Рассматриваются два направления.

Первое – введение так называемого «нониусного» участка. Это участок полета с работой двигателей малой тяги, на котором компенсируется промах ракеты, накопившийся за счет разброса импульса последействия маршевого (основного) двигателя. Двигатели малой тяги выбираются с такими характеристиками, чтобы их импульс последействия был бы приемлемо малым.

Второе – ориентация ракеты в момент выключения двигателя по так называемому ню-направлению. Ню-направления – это направления движения ракеты, в котором прирост скорости и координат не вызывает отклонений по дальности и боковому направлению.

Для уменьшения рассеивания, обусловленного возмущениями атмосферного участка нисходящей ветви траектории, вводят:

1. Ориентированный вход ОЧ в атмосферу – для снижения рассеивания за счет колебаний ОЧ.
2. Закрутку ОЧ – для снижения влияния поперечного смещения центра масс ОЧ на отклонения точек падения.

Кроме того, выбором соответствующего значения баллистического коэффициента (σ_x) и угла входа в атмосферу можно также добиться существенного снижения рассеивания за счет плотности и температуры атмосферы, ветра и разброса σ_x .

5.3. Зависимость точности выведения от условий пусков

Под условиями пусков будем понимать широту точки старта, азимут пуска и характеристики орбит выведения.

Ввиду практической невозможности аналитического решения поставленной задачи изменение точности выведения от условий пуска оценивается путем прямых расчетов элементов орбиты с использованием системы дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение РН.

Показано, что отклонения оскулирующих элементов, характеризующих форму и размеры начальной орбиты, зависят от ее геометрических характеристик, а погрешность положения орбитальной плоскости в пространстве определяется азимутом пуска, широтой точки старта и высотой перигея расчетной орбиты.

При этом точность выведения космических аппаратов на одну и ту же орбиту (в схеме прямого выведения без разрывных участков) практически не зависит от веса выводимого полезного груза (изменение точности в пределах 5–6 %, рис. 5.4–5.7).

Типовой характер изменения предельных отклонений оскулирующих элементов орбиты в зависимости от условий пусков представлен на рис. 5.8, 5.10, 5.12.

На рис. 5.8 приведены изменения относительной погрешности положения орбитальной плоскости в пространстве (i, Ω) в зависимости от азимута пуска (A_0).

Характер изменения погрешности положения орбитальной плоскости в пространстве полностью повторяет характер изменения производных $\partial i / \partial A_0$ и $\partial \Omega / \partial A_0$ (рис. 5.9).

На рис. 5.10 приведено изменение относительной погрешности по высоте апогея H_a орбиты в зависимости от ее геометрических размеров (высот апогея – H_a и перигея – H_p).

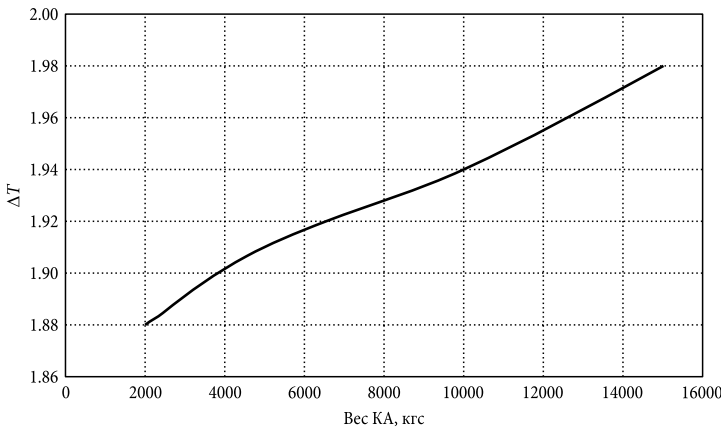


Рис. 5.4

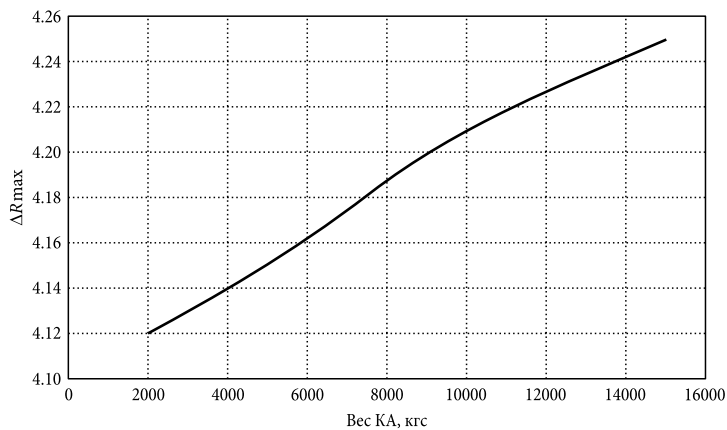


Рис. 5.5

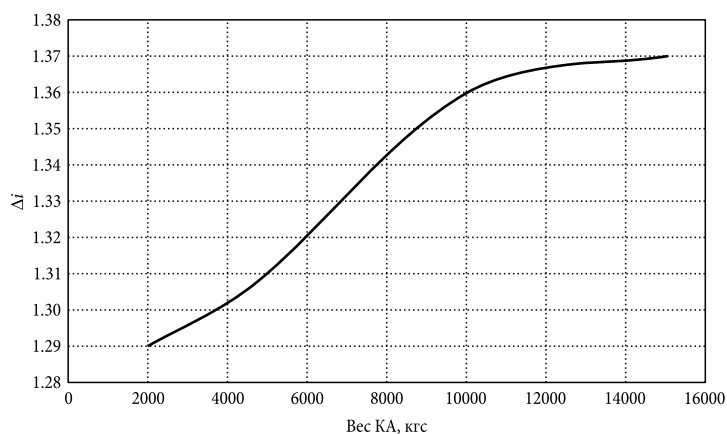


Рис. 5.6

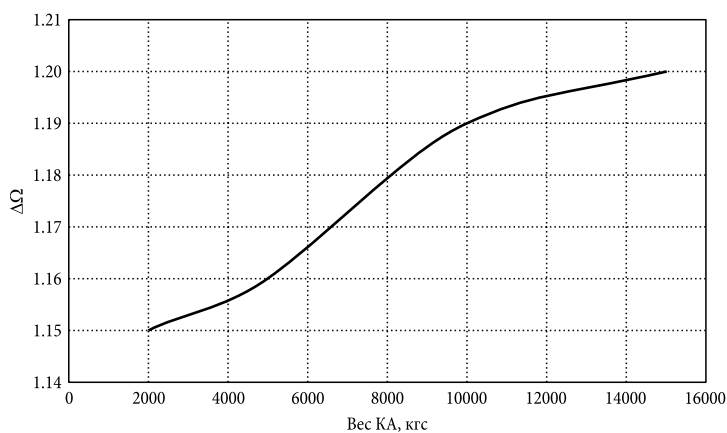


Рис. 5.7

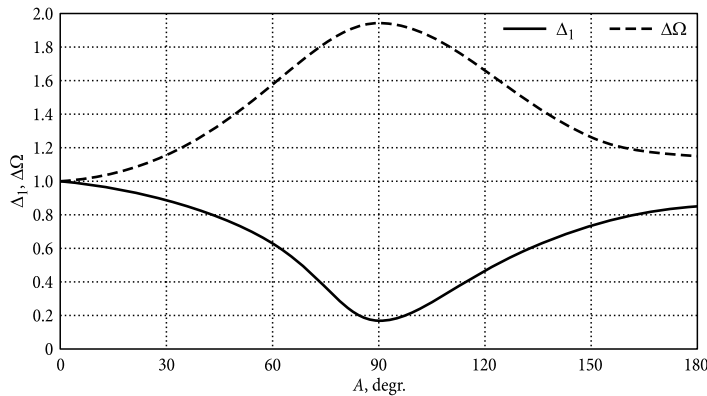


Рис. 5.8

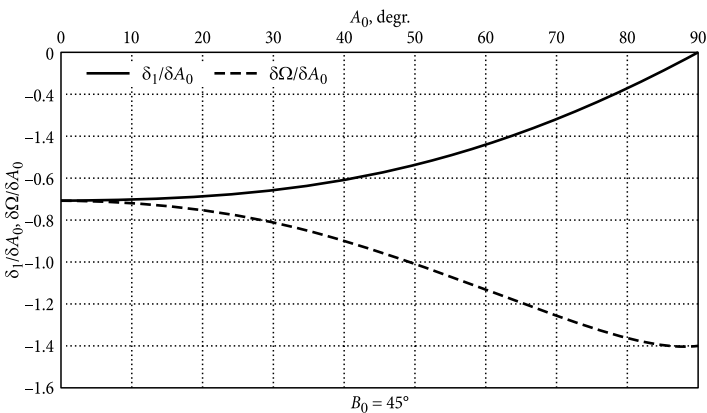


Рис. 5.9

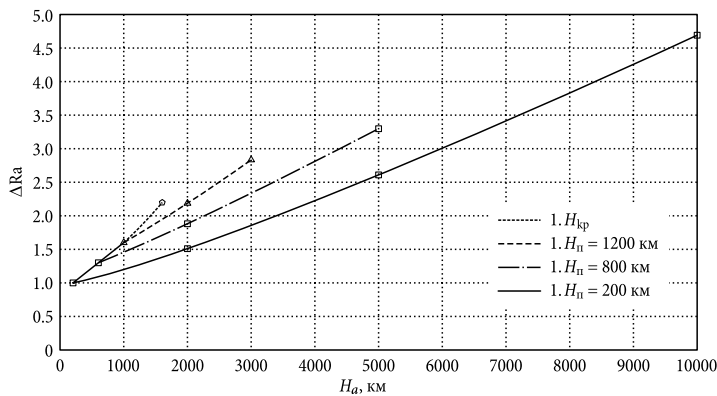


Рис. 5.10

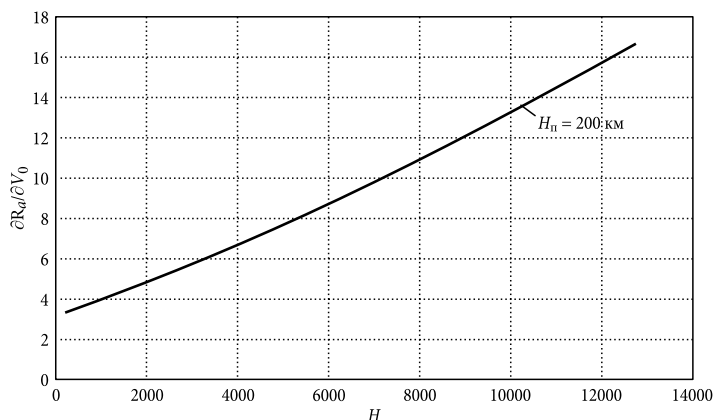


Рис. 5.11

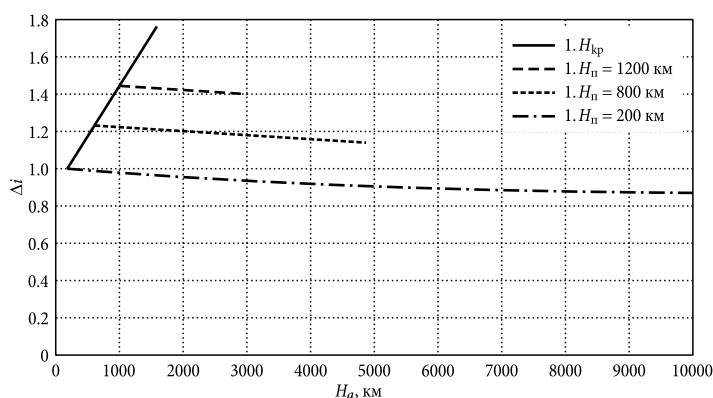


Рис. 5.12

Характер изменения погрешности по высоте апогея аналогичен характеру изменения производной $\partial R_d / \partial V_0$ (рис. 5.11).

На рис. 5.12 приведено изменение погрешности по наклону i орбиты в зависимости от ее геометрических размеров (высот апогея – H_a и перигея – $H_п$)

Для баллистических ракет рассеивание точек падения ОЧ является функцией дальности L и угла входа ОЧ в плотные слои атмосферы $\vartheta_{\text{вх}}$. Так, с изменением дальности стрельбы от минимальной до максимальной рассеивание Δ увеличивается в 2–2,5 раза, а изменение Δ от $\vartheta_{\text{вх}}$ характеризуется следующими величинами:

$\vartheta_{\text{вх}} - \vartheta_{\text{вх, опт}}$	5°	10°	15°
$\frac{\Delta}{\Delta_{\text{опт}}}, \%$	10	30	100

Глава 6

АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ВЫВЕДЕНИЯ

6.1. Статистическая обработка результатов испытаний

6.1.1. Общие положения

Для оценки точностных характеристик контролируемых параметров в условиях ограниченного количества испытаний используется метод апостериорной оценки, получивший название «опытно-теоретический метод», суть которого заключается в следующем.

Определение точностных характеристик и оценка их соответствия заданным требованиям проводятся по математическим моделям ошибок приборов, систем и агрегатов, опытная проверка и корректировка которых выполняются по результатам испытаний.

При разработке модели используются расчетные и опытные данные, полученные при лабораторных, заводских, стендовых и других испытаниях приборов, систем и агрегатов, с учетом принятых в производстве допусков.

Проверка и корректировка модели ошибок проводятся посредством проверки статистических гипотез:

- об отсутствии значимых смещений в результатах измерений;
- о соответствии расчетных разбросов их опытным значениям.

Поскольку возмущения, действующие на испытываемый объект, и погрешности измерительных средств, по информации которых определяются отклонения, можно считать независимыми, то принимается, что результаты измерений распределены по нормальному закону.

Точность измерительных средств, по информации которых определяются отклонения, должна быть по крайней мере на метрический порядок (в 3–4 раза) выше ожидаемой точности результатов измерений.

Уровень значимости при проверке гипотезы о том, что результаты измерения принадлежат одной генеральной совокупности, принимается равным 1 %.

Доверительная вероятность при проверке гипотезы о приемлемости использованной для априорной оценки точностных характеристик математической модели ошибок принимается равной 0,95.

Риски «поставщика» и «потребителя» при опытно-теоретической оценке точностных характеристик, т. е. вероятности «забракования» кондиционной продукции или пропуска брака, принимаются равными 0,25.

Минимальный объем выборки составляет 7 испытаний.

Возможность объединения в одну группу результатов измерений устанавливают на основании оценки различия условий испытаний, производимой путем сопоставления расчетных значений средних квадратичных отклонений.

Расчетные значения СКО результатов измерений, объединенных в общую группу, не должны отличаться друг от друга более чем на 10 %.

Результаты аварийных испытаний и испытаний, для которых установлена аномальная работа приборов, систем и агрегатов, исключают из общей группы согласованным решением.

Перед объединением в общую группу в результаты измерений вводят поправки (в том числе на выявленные в ходе испытаний ошибки), приводящие к единому алгоритму подготовки данных на испытания.

6.1.2. Подготовка исходных данных

Исходными данными для оценки точностных характеристик контролируемого параметра являются:

X_i^u – результат измерения в i -м испытании;

σ_i^p – расчетное значение СКО в i -м испытании, обусловленное погрешностями работы приборов, систем и агрегатов испытываемого образца;

$\sigma_i^{\text{изм}}$ – СКО, обусловленное погрешностями вычисления параметра по результатам обработки измерений в i -м испытании;

σ_p – СКО, обусловленное погрешностями подготовки исходных данных на испытание;

$\Delta X_i^{\text{поп}}$ – поправка в результат измерения для i -го испытания;

n – число результатов измерения (объем выборки).

Результаты измерений группируются по признаку одинаковых условий испытаний.

Для упорядоченной выборки СКО результатов измерений, объединенных в общую группу

$$\sigma_1^p \leq \sigma_2^p \leq \dots \leq \sigma_n^p, \quad (6.1)$$

подсчитывают коэффициент

$$\delta = \frac{\sigma_n^p - \sigma_1^p}{\sigma_1^p}, \quad (6.2)$$

который не должен превышать 0,1.

Среднее расчетное значение сигмы для результатов измерений, объединенных в общую группу, определяется по формуле

$$\sigma_{\text{рас}} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i^p)^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.3)$$

Среднее значение сигмы погрешности вычисления для результатов измерений, объединенных в общую группу, определяется по формуле

$$\sigma_{\text{изм}} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i^{\text{изм}})^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.4)$$

Априорное (ожидаемое) значение сигмы для результатов измерений, объединенных в общую группу, определяется по формуле

$$\sigma_o = \left\{ \sigma_{\text{рас}}^2 + \sigma_{\text{изм}}^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.5)$$

Определяются весовые коэффициенты P_{Xi}

$$P_{Xi} = \frac{(\sigma_{\text{рас}})^2 + (\sigma_{\text{изм}})^2}{(\sigma_i^{\text{рас}})^2 + (\sigma_i^{\text{изм}})^2}, \quad (6.6)$$

а также сумма весов для принятой совокупности

$$P_X = \sum_{i=1}^n P_{Xi}. \quad (6.7)$$

Перед объединением в общую группу в результаты измерений вводят поправки, в том числе на выявленные в ходе испытаний ошибки.

Исправленный результат измерения определяется как

$$X_i = X_i^u + \Delta X_i^{\text{попр}}. \quad (6.8)$$

6.1.3. Оценка аномальности результатов измерения

Для упорядоченной выборки исправленных результатов измерений

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n. \quad (6.9)$$

Находят среднее весовое результатов измерения

$$X_{\text{ср}} = \frac{1}{P_X} \cdot \sum_{i=1}^n P_{Xi} \cdot X_i. \quad (6.10)$$

Вычисляют выборочное среднее квадратичное отклонение

$$S = \left\{ \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n P_{Xi} (X_i - X_{cp})^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.11)$$

Подсчитывают отношения

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{X_n - X_{cp}}{S}; \\ t_1 &= \frac{X_{cp} - X_1}{S}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

сравнивают отношение t_n (t_1) с величиной $\beta(n)$, взятой из таблицы коэффициентов (табл. 6.1).

Если t_n (t_1) $\geq \beta$, то подозреваемый в аномальности результат измерения X_n (или X_1) аномален и его исключают из дальнейшей обработки. Исключают также результаты измерений других контролируемых параметров в этом испытании.

В противном случае подозреваемый результат считают нормальным и не исключают.

После исключения оставшаяся часть результатов снова проверяется на аномальность по изложенным выше правилам.

При добавлении в общую группу новых данных и внесении поправок в результаты измерений проверка принадлежности всех результатов к одной генеральной совокупности проводится с учетом ранее исключенных измерений.

6.1.4. Обработка опытных данных

Оценка смещения

Для тех « n » результатов измерений, которые после выполнения пунктов разд. 6.1.3 признаны принадлежащими к общей генеральной совокупности, по формуле (6.10) вычисляют опытную величину смещения (X_{cp}). Затем, используя формулу (6.11), вычисляют выборочное среднее квадратичное отклонение (S).

Определяют границы доверительных интервалов

$$X_{min} = X_{cp} - \left\{ \left[\tau(n) \cdot S \right]^2 + \left[1,96 \cdot \sigma_p \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (6.13)$$

$$X_{max} = X_{cp} + \left\{ \left[\tau(n) \cdot S \right]^2 + \left[1,96 \cdot \sigma_p \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (6.14)$$

Значения $t(n)$ берут из таблицы коэффициентов (табл. 6.1).

Если доверительный интервал $[X_{min}, X_{max}]$ содержит нуль, то делают заключение об отсутствии значимого смещения в результатах измерения.

Если доверительный интервал $[X_{\min}, X_{\max}]$ не содержит нуля, то считается, что имеется значимое смещение и необходимо провести работы по выявлению причин смещения.

Как исключение, в качестве временной меры до выяснения причин, допускается введение согласованной эмпирической поправки, компенсирующей это смещение или его часть.

После уточнения в алгоритмах подготовки данных на испытание факторов, влияющих на смещение, и внесения поправок в результаты измерений снова оценивается смещение по изложенным в разд. 6.1.3 правилам.

Оценка разброса

Для проверки гипотезы о приемлемости использованной при расчете точностных характеристик математической модели ошибок подсчитывают допустимую величину СКО

$$\sigma_{\text{доп}} = \gamma_d(n) \times S. \tag{6.15}$$

Значения $\gamma_d(n)$ берут из таблицы коэффициентов (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Таблица коэффициентов

n	β	τ	γ_u	γ_l	γ_d
3	1.15	2.484	1.86	0.849	0.578
4	1.49	1.591	1.57	0.855	0.620
5	1.75	1.242	1.44	0.862	0.649
6	1.94	1.050	1.37	0.869	0.672
7	2.10	0.927	1.32	0.875	0.690
8	2.22	0.837	1.28	0.880	0.705
9	2.32	0.769	1.26	0.885	0.718
10	2.41	0.715	1.24	0.889	0.729
11	2.48	0.672	1.22	0.893	0.739
12	2.55	0.636	1.20	0.896	0.748
13	2.61	0.604	1.19	0.900	0.755
14	2.66	0.577	1.18	0.902	0.762
15	2.70	0.554	1.17	0.904	0.769
16	2.75	0.533	1.17	0.907	0.775
17	2.78	0.514	1.16	0.909	0.780
18	2.82	0.497	1.15	0.911	0.785
19	2.85	0.482	1.15	0.913	0.790
20	2.88	0.468	1.14	0.914	0.794

Результат сравнивают с априорным значением сигмы σ_0 , формула (6.5).

Если $\sigma_{\text{доп}} > \sigma_0$, то считается, что принятая математическая модель ошибок не соответствует условиям проведения испытаний и нуждается в уточнении.

Если $\sigma_{\text{доп}} \leq \sigma_0$, то принимается, что модель ошибок соответствует условиям испытаний.

После корректировки (при необходимости) математической модели ошибок находят границу доверительного интервала для среднего квадратичного отклонения:

– верхняя

$$\sigma_{\text{в}} = \gamma_{\text{в}}(n) \times S; \quad (6.16)$$

– нижняя

$$\sigma_{\text{н}} = \gamma_{\text{н}}(n) \times S. \quad (6.17)$$

Значения $\gamma_{\text{в}}(n)$ и $\gamma_{\text{н}}(n)$ берут из таблицы коэффициентов (табл. 6.1).

В результате сопоставления априорного значения сигмы (σ_0) с границами доверительных интервалов $[\sigma_{\text{н}}, \sigma_{\text{в}}]$ может выполняться одно из следующих неравенств:

$$\sigma_{\text{н}} \leq \sigma_0 \leq \sigma_{\text{в}}, \quad (6.18)$$

$$\sigma_0 < \sigma_{\text{н}}, \quad (6.19)$$

$$\sigma_{\text{в}} < \sigma_0. \quad (6.20)$$

Если доверительный интервал $[\sigma_{\text{н}}, \sigma_{\text{в}}]$ содержит априорное значение сигмы (неравенство (6.18)), то за опытно-теоретическое значение средней квадратичной ошибки σ^* результата измерения для условий проведения испытаний принимается его расчетная величина

$$\sigma^* = \sigma_{\text{рас}}. \quad (6.21)$$

Если доверительный интервал $[\sigma_{\text{н}}, \sigma_{\text{в}}]$ не содержит априорное значение сигмы (неравенства (6.19) или (6.20)), то за опытно-теоретическое значение средней квадратичной ошибки σ^* результата измерения для условий проведения испытаний принимают

$$\sigma^* = \sigma_{\text{рас}} \cdot \frac{\sigma_{\text{н}}}{\sigma_0} \quad (6.22)$$

или

$$\sigma^* = \sigma_{\text{рас}} \cdot \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sigma_0} \quad (6.23)$$

соответственно для неравенств (6.18) или (6.19).

Пересчет опытно-теоретического значения СКО на j -е условия эксплуатации производится по формуле

$$\sigma_j^* = (1 + \delta) \times \sigma_j^p, \quad (6.24)$$

где δ – невязка опытной и расчетной сигмы для условий испытаний.

Невязка на каждый k -й контролируемый параметр определяется по формуле

$$\delta = \frac{\sigma^* - \sigma_{\text{рас}}}{\sigma_{\text{рас}}}. \quad (6.25)$$

При наличии нескольких (m) контролируемых параметров и если их результаты измерения нельзя считать не зависимыми друг от друга, то, как исключение, в качестве временной меры до выяснения причин различия опытных и расчетных сигм невязка δ определяется как среднее арифметическое значений невязок δ_k

$$\delta = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \delta_k. \quad (6.26)$$

Оценка максимальных отклонений

Максимальные предельные отклонения контролируемого параметра определяются по формуле

$$\Delta_{\text{опыт}} = |X_{\text{ср}} \pm K_B \cdot \sigma^*|,$$

где K_B – квантиль, соответствующий заданной доверительной вероятности.

Пересчет максимальных предельных отклонений на требуемые (j -е) условия эксплуатации производится по формуле

$$\Delta_j = k_{\text{согл}} \cdot \sigma_j^S,$$

где $k_{\text{согл}}$ – коэффициент согласования опытных и расчетных максимальных предельных отклонений.

Коэффициент согласования на каждый k -й контролируемый параметр определяется по формуле

$$k_{\text{согл}} = \frac{\Delta_{\text{опыт}}}{\Delta_{\text{расч}}}.$$

При наличии нескольких (m) контролируемых параметров в случае, когда результаты их измерения нельзя считать независимыми, как исключение, в качестве временной меры до выяснения причин различия опытных и расчетных предельных отклонений коэффициент согласования $k_{\text{согл}}$ определяется как среднее арифметическое значений $k_{\text{согл}_i}$

$$k_{\text{согл}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m k_{\text{согл}_i}.$$

Проверка соответствия опытных характеристик заданным требованиям

Заданное требование на контролируемый параметр считается выполненным, если

– в каждом i -м испытании отклонение X_i не превышает

$$X_i \leq 3,0 \sigma_0; \quad (6.27)$$

- отсутствует значимое смещение $X_{\text{ср}}$ по совокупности испытаний;
- опытно-теоретическое значение разброса σ^* для оговоренных в задании условий не превышает требуемого значения

$$\sigma^* \leq \sigma_{\text{треб}} \quad (6.28)$$

6.2. Апостериорный анализ ошибок

Ошибки, влияющие на суммарный промах баллистической ракеты, можно разбить на две категории: ошибки, возникающие на активном участке полета, и ошибки, возникающие во время свободного полета и при входе в плотные слои атмосферы.

Причинами ошибок во время активного полета являются:

- неточная работа системы управления (инструментальные ошибки);
- неточность выполнения системой регулирования управляющих сигналов, поступающих от системы управления;
- неточное выполнение двигательной установкой команды на отсечку двигателя (ошибки системы отделения, импульс последействия).

Целью анализа летных данных является выделение этих ошибок и определение их происхождения.

В то время как ошибки, возникающие в системе регулирования и выключения двигательной установки, обычно определяются по данным телеметрии, конечная навигационная точность системы управления может быть определена сравнением ее выходных данных с высокоточными данными по скорости ракеты и ее координатами, полученными путем траекторных измерений.

Разделение суммарной ошибки системы управления (промаха) на составляющие ограничивается составом и точностью телеметрических и траекторных измерений.

Следует отметить, что ни одна система траекторных измерений не может обеспечить измерения с требуемой точностью на всей траектории полета. Поэтому анализ должен предусматривать использование данных различных систем слежения за ракетой с целью построения наиболее точной траектории.

При анализе данных летных испытаний в первую очередь необходимо установить суммарный промах за счет ошибок системы управления $\Delta_{\text{АУ}}$ и возмущений пассивного полета $\Delta_{\text{ПУ}}$

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ПУ}} &= \Delta_1 - \Delta_2; \\ \Delta_{\text{АУ}} &= \Delta_2, \end{aligned}$$

где Δ_2 – прогнозируемый промах ракеты по данным траекторных измерений; Δ_1 – суммарный промах ракеты по данным геодезических измерений.

Для обнаружения источников больших ошибок инерциального измерительного элемента наиболее полезно сначала рассмотреть кривую ошибок в скорости.

Пример: λ -акселерометр.

Типичными ошибками СУ при определении скорости в λ -канале являются:

- ошибка запаздывания $\Delta V_C = \Delta \tau \dot{W}_\lambda$;
- ошибка масштабного коэффициента $\Delta V_g = \Delta K_1 \times W_\lambda$;
- ошибка из-за смещения нуля $\Delta V_0 = \Delta K_2 t$.

Очевидными являются следующие зависимости:

- ошибка в скорости вследствие запаздывания определяется профилем ускорений и пропорциональна ускорению в данный момент;
- ошибка масштабного коэффициента повторяет профиль скоростей;
- ошибка нуля приводит к линейно изменяющейся во времени ошибке скорости.

Учитывая различие в форме (слабая корреляция) этих кривых, можно выделить некоторые источники ошибок СУ, рассмотрев профиль ошибок скорости, а также координат.

Глава 7

ОПЫТНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОЧНОСТИ ВЫВЕДЕНИЯ

Оценка точности выведения проводилась по методике, изложенной в разд. 6.

7.1. Ракета-носитель «Зенит»

В семейство ракет-носителей «Зенит» (рис. 7.1) входят:

- двухступенчатая РН «Зенит-2»,
- трехступенчатая РН «Зенит-3SL».

Штатная эксплуатация РН «Зенит» началась в:

- 1985 г. – первый пуск двухступенчатой РН «Зенит-2»,
- 1999 г. – первый пуск трехступенчатой РН «Зенит-3SL».

Запуски КА ракетой-носителем «Зенит-2» проводились с космодрома ГИК МО РФ Байконур, в основном, на околокруговую орбиту высотой 850 км.

Запуски КА ракетой-носителем «Зенит-3SL» проводились из акватории Тихого океана на эллиптические приэкваториальные орбиты с высотой в перигее от 200 до 8600 км и в апогее до 41 440 км. Выведение всех КА осуществлялось по схеме с довыведением: первые две ступени (РН «Зенит-2S») обеспечивали выведение разгонного блока (РБ ДМ-SL) с КА на незамкнутую промежуточную орбиту. Дальнейшее выведение КА на целевую (переходную к геостационарной) орбиту обеспечивал РБ ДМ-SL с однократным или двукратным включением маршевого двигателя.

Точность выведения РН «Зенит-2»

По признаку близости условий пусков оценка точности выведения космических аппаратов РН «Зенит-2» проводилась по совокупности двенадцати запусков КА на околокруговую орбиту высотой ≈ 850 км с привлечением данных

по долготе восходящего узла ($\Delta\Omega$) по двум запускам КА на околокруговую орбиту высотой $X \approx 200$ км.

Объем выборки составил:

- для наклона плоскости орбиты – 14 пусков;
- для периода обращения КА – 12 пусков;
- для максимальной высоты – 11 пусков;
- для долготы восходящего узла – 8 пусков.

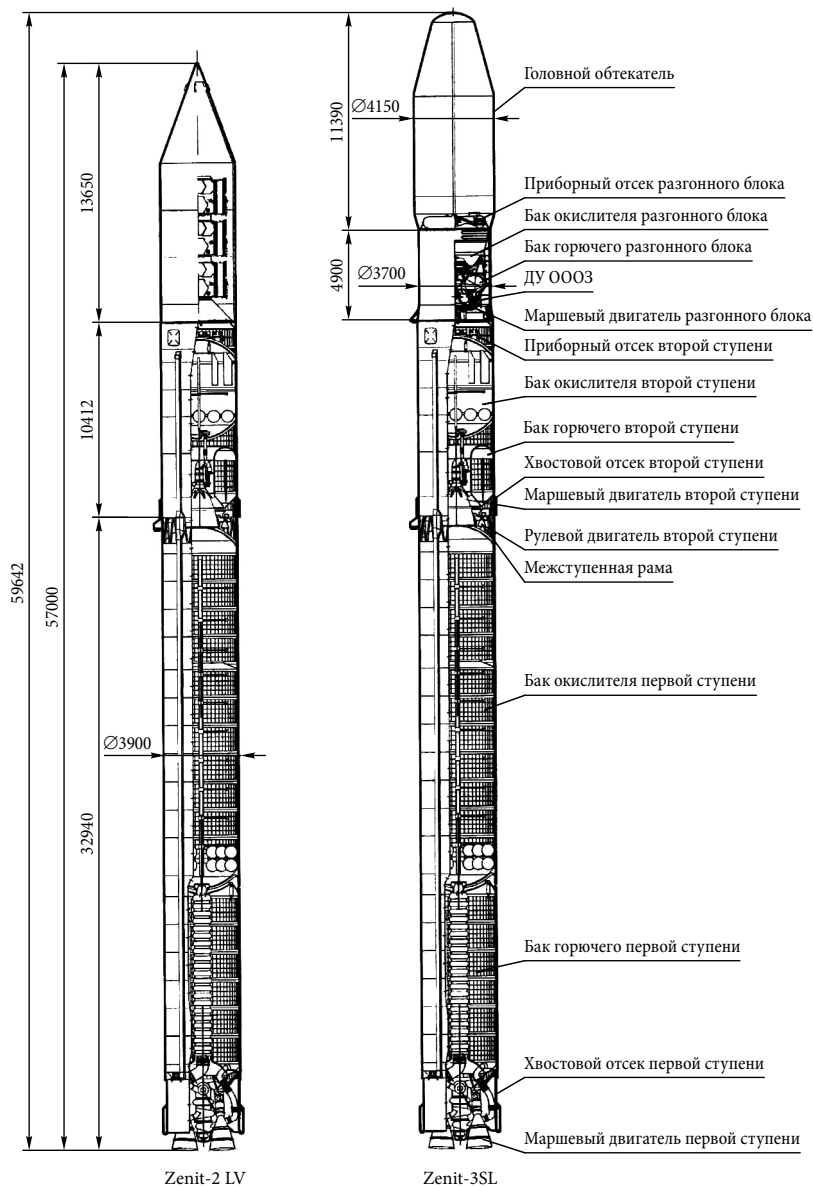


Рис. 7.1. Ракета-носитель «Зенит»

Результаты статистической обработки разностей между опытными и расчетными значениями оскулирующих параметров орбиты в точке выведения приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1. Статистические данные по точности выведения РН «Зенит-2»

Характеристика выборки	Контролируемый параметр			
	i , угл. мин	T , с	H_{\max} , км	Ω , угл. мин
Оценка математического ожидания	-0,22	-0,68	-1,30	-1,32
Оценка СКО	0,54	0,82	1,55	0,53
Значения экстремальных членов в выборке: минимальное значение максимальное значение	-1,08 1,01	-2,35 0,49	-4,60 0,71	-2,25 -0,75
Допустимые экстремальные значения: минимальное значение максимальное значение	-1,65 1,21	-2,76 1,41	-5,14 2,55	-2,50 -0,14

Из приведенных данных следует, что нет оснований считать экстремальные значения в выборке аномальными.

Результаты опытно-теоретической оценки точности выведения космических аппаратов РН «Зенит-2» приведены в табл. 7.2.

Таблица 7.2. Опытно-теоретические характеристики РН «Зенит-2»

Характеристика выборки	Контролируемый параметр			
	i , угл. мин	T , с	H_{\max} , км	Ω , угл., мин
Оценка математического ожидания $\bar{\Delta}$	-0,22	-0,68	-1,30	-1,32
Границы доверительных интервалов для МО: минимальная Δ_{\min} максимальная Δ_{\max}	-0,53 0,09	-1,20 -0,16	-2,34 -0,25	-1,76 -0,87
Оценка среднего квадратичного отклонения S	0,54	0,82	1,55	0,53
Границы доверительных интервалов для СКО: нижняя σ_1 верхняя σ_{2a}	0,49 0,64	0,73 0,98	1,39 1,89	0,47 0,68
Опытно-теоретическое значение СКО σ^*	0,50	0,98	1,89	0,65
Невязка опытных и расчетных СКО δ	0,00	-0,12	-0,05	0,00
Предельное отклонение $P = 0,995$	2,0	3,44	6,61	3,23
Коэффициент согласования $k_{\text{согл}}$	1,6	1,1	1,2	1,7

Из результатов опытнo-теоретической оценки точности выведения космических аппаратов РН «Зенит-2» следует:

1. Границы доверительных интервалов для математических ожиданий параметров T , H_{\max} , Ω не включают в себя их расчетные значения (равные нулю), что свидетельствует о наличии значимых систематических смещений. Для параметра Δi значимое смещение отсутствует.
2. Опытные оценки СКО контролируемых параметров не превышают их расчетных значений, что подтверждает приемлемость используемой для априорных расчетов точности выведения КА математической модели ошибок СУ.
3. Невязка опытных и расчетных значений СКО близка к нулю.
4. В условиях неопределенности поправок приведения на выявленные математические ожидания в отклонениях контролируемых параметров орбиты опытный коэффициент согласования модели погрешностей СУ при расчете максимальных предельных отклонений составляет 1,3, ..., 1,4.

С использованием уточненной математической модели погрешностей СУ РН «Зенит-2» предельные (с вероятностью $P = 0,995$) отклонения элементов орбиты при выведении КА на круговую орбиту высотой 200 км не превышают:

- по высоте $\pm 3,5$ км;
- по периоду обращения $\pm 2,5$ с;
- по наклонению плоскости орбиты $\pm 0,034^\circ$.

Достигнутый уровень обеспечил для комплекса «Зенит-2» лидирующее место среди наиболее точных современных ракетных комплексов.

Точность выведения РН «Зенит-3SL»

Оценка точности выведения космических аппаратов РН «Зенит-3SL» по признаку близости условий пуска проводилась:

- по высотам апогея и перигея – по совокупности 19 и 11 запусков РН (варианты 1 и 2 выборки);
- по наклонению – по совокупности 30 запусков РН (вариант 3 выборки).

В вариант 1 выборки включены запуски РН:

- с номинальной высотой в перигее от 200 до 2300 км – типовая постперигейная схема выведения на переходную к геостационарной орбиту (ПГСО) с двумя включениями маршевого двигателя разгонного блока ДМ-SL и с паузой между включениями 30–60 мин.

В вариант 2 выборки включены запуски РН:

- с однократным включением маршевого двигателя разгонного блока ДМ-SL (высоты перигея, как правило, не более 300 км);
- с высотами в перигее свыше 2300 км – с двумя включениями маршевого двигателя разгонного блока ДМ-SL.

К оценке точности выведения по наклонению привлекались результаты запусков всех РН в вариантах 1 и 2 выборки. При этом оценивался модуль разностей между опытными и расчетными значениями величины наклонения (для экваториальных орбит результат измерения наклонения всегда положительный).

Анализ результатов первых запусков КА (по информации о векторе состояния, зафиксированном в телеметрическом кадре СУ разгонного блока ДМ-SL на момент времени, непосредственно предшествующий отделению КА от РБ) показал, что имеет место превышение высоты апогея целевой орбиты относительно номинального значения величиной ~ 30 км. Причиной данного превышения явилось увеличение примерно на 40 мс задержки выключения двигателя, приведшее, соответственно, к увеличению импульса последействия на 300 кгс·с.

С разгонного блока № 11Л при формировании команды на выключение маршевого двигателя учитывался реальный импульс последействия. В результаты измерений величины фактических отклонений параметров всех предшествующих запусков введены поправки на нерасчетный импульс последействия двигателя. Введены поправки также на номинальный импульс отделения КА от блока ДМ-SL, поскольку требования к орбите выведения заданы без учета этого импульса.

Результаты статистической обработки разностей между приведенными к единым условиям пуска опытными и расчетными значениями оскулирующих элементов орбиты на момент первого прохождения КА апогея орбиты приведены в табл. 7.3.

Из приведенных данных следует, что нет оснований считать экстремальные значения в выборке аномальными.

Результаты опытно-теоретической оценки точности выведения космических аппаратов РН «Зенит-3SL» приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.3. Статистические данные по точности выведения

Характеристика выборки	Контролируемый параметр				
	Вариант 1		Вариант 2		i , градусы
	На, км	Нп, км	На, км	Нп, км	
Оценка математического ожидания	0,22	-1,10	-24,09	-0,02	0,027
Оценка СКО	14,95	1,96	27,28	1,04	0,021
Значения экстремальных членов в выборке:					
минимальное значение	-31,8	-3,6	-69,6	-2,2	0,002
максимальное значение	20,3	2,9	15,8	1,8	0,075
Допустимые экстремальные значения:					
минимальное значение	-42,38	-6,68	-91,75	-2,59	-0,038
максимальное значение	42,81	4,48	43,57	2,55	0,092

Таблица 7.4. Опытнo-теоретические характеристики

Характеристика выборки	Контролируемый параметр				
	Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3
	На, км	Нп, км	На, км	Нп, км	$ i $, градусы
Оценка математического ожидания $\bar{\Delta}$	0,22	-1,10	-24,09	-0,02	0,027
Границы доверительных интервалов для МО:					
минимальная Δ_{\min}	-6,99	-2,04	-42,43	-0,72	0,019
максимальная Δ_{\max}	7,42	-0,15	-5,76	0,68	0,035
Оценка среднего квадратичного отклонения S	14,95	1,96	27,28	1,04	0,021
Границы доверительных интервалов для СКО:					
нижняя σ_1	13,65	1,79	24,36	0,93	0,019
верхняя σ_2	17,19	2,25	33,28	1,26	0,023
Опытнo-теоретическое значение СКО σ^*	13,65	1,79	24,74	0,93	0,023
Невязка опытнoх и расчетнoх СКО δ	0,07	0,43	0,76	0,38	-0,284
Предельное отклонение $P = 0,98$	40,27	6,35	101,64	2,96	0,081
Коэффициент согласования $k_{\text{согл}}$	1,35	2,18	1,76	1,38	1,07

Из результатов опытнo-теоретической оценки точности выведения КА разгонным блоком ДМ-SL следует:

1. Границы доверительных интервалов для математических ожиданий в отклонениях контролируемых параметров орбиты (высот апогея и перигея, наклонения) включают в себя их расчетные значения ($(\bar{\Delta})_{\text{На}} = (\bar{\Delta})_{\text{Нп}} = 0$ км, $(\bar{\Delta})|i| = 0,033^\circ$), что свидетельствует об отсутствии значимых систематических смещений в этих параметрах.
2. Опытные оценки средних квадратичных отклонений контролируемых параметров целевой орбиты несущественно отличаются от их расчетных значений, что подтверждает приемлемость использования для априорных расчетов точности выведения КА математической модели ошибок СУ.
3. Невязка опытнoх и расчетнoх значений СКО близка к нулю.
4. В условиях неопределенности поправок приведения на выявленные математические ожидания в отклонениях контролируемых параметров орбиты опытнoй коэффициент согласования модели погрешностей СУ при расчете максимальных предельных отклонений составляет 1,3, ..., 1,4.

С использованием уточненной математической модели погрешностей СУ РН «Зенит-3SL» предельные (с вероятностью $P = 0,98$) отклонения элементов орбиты при выведении КА на стандартную геопереходную орбиту с высотами

перигея $H_p = 200$ км, апогея $H_a = 35786$ км и наклонением $i = 0^\circ$ не превышают:

- по высоте перигея $\pm 10,0$ км;
- по высоте апогея $\pm 80,0$ км;
- по наклонению плоскости орбиты $\pm 0,2^\circ$.

7.2. Ракета-носитель «Циклон»

В семейство ракет-носителей «Циклон» (рис. 7.2) входят:

- двухступенчатая РН «Циклон-2»;
- трехступенчатая РН «Циклон-3».

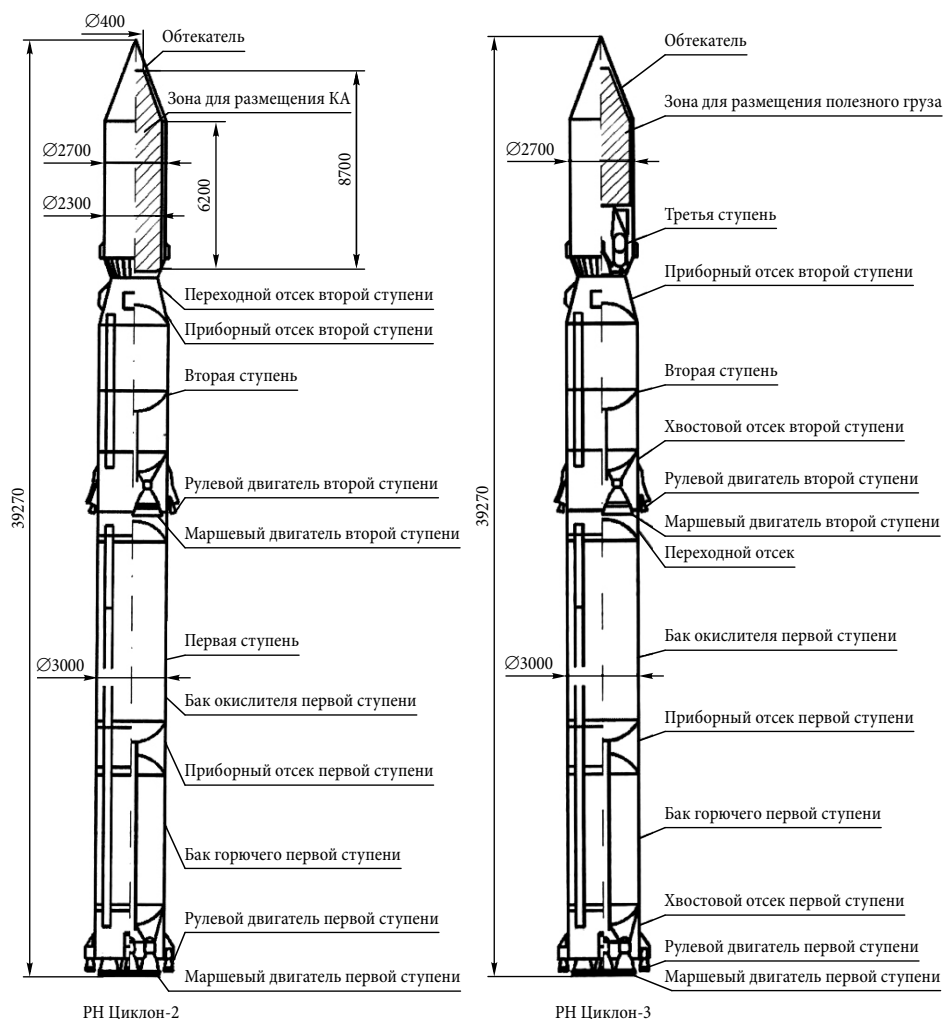


Рис. 7.2. Ракета-носитель «Циклон»

РН семейства «Циклон» являются одними из самых надежных в мире.

Штатная эксплуатация РН «Циклон» началась в:

- 1969 г. – первый пуск двухступенчатой РН «Циклон-2»;
- 1977 г. – первый пуск трехступенчатой РН «Циклон-3».

К настоящему времени проведено 106 успешных пусков РН «Циклон-2» и 115 успешных пусков РН «Циклон-3».

Запуски КА ракетой-носителем «Циклон-3» проводились с космодрома ГИК МО РФ Плесецк, в основном на околокруговые орбиты высотой от 500 до 1700 км.

По признаку близости условий пусков все составляющие элементов орбиты были объединены в две основные группы.

Первая группа включает в себя результаты пусков РН «Циклон-3» на околокруговые орбиты высотой до 1000 км.

Вторая группа включает в себя результаты пусков РН «Циклон-3» на околокруговые орбиты высотой более 1000 км.

Результаты пусков РН «Циклон-2», проводимых с космодрома ГИК МО Байконур, отнесены к третьей группе.

Контролируемыми по точности выведения приняты следующие параметры в точке выведения:

1. Для РН «Циклон-3» – элементы оскулирующей орбиты:
 - угол наклона плоскости орбиты – i ,
 - период обращения – $T_{\text{оск}}$,
 - радиус-вектор – H_{max} .
2. Для РН «Циклон-2» – вектор состояния РН в орбитальной системе координат:
 - составляющие вектора скорости – V_n, V_r, V_v ,
 - составляющие вектора положения – R_n, R_r, R_v .

Результаты статистической обработки разностей между опытными и расчетными значениями элементов орбит приведены в табл. 7.5, 7.6.

Таблица 7.5. Статистические данные по точности выведения РН «Циклон-3»

Характеристики выборки	Контролируемый параметр					
	500 км < $H_{\text{кр}}$ < 1000 км			1000 км < $H_{\text{кр}}$ < 1700 км		
	i , угл. мин	$T_{\text{оск}}$, с	H_{max} , км	i , угл. мин	$T_{\text{оск}}$, с	H_{max} , км
Оценка МО	0,50	1,50	4,57	0,96	2,13	4,58
Оценка СКО	0,93	1,62	4,33	1,23	2,29	4,77
Значения экстремальных членов в выборке:						
минимального	–1,87	–1,65	–8,21	–1,90	–1,2	–5,90
максимального	3,30	5,52	10,56	3,57	9,3	11,10
Примечание:	признано аномальным отклонение по $\Delta_i = -3,8$ угл. мин			аномальных отклонений не зафиксировано		

Таблица 7.6. Статистические данные по точности выведения РН «Циклон-2»

Характеристики выборки	Контролируемый параметр					
	V_n , м/с	V_r , м/с	V_B , м/с	R_n , км	R_r , км	R_B , км
Оценка МО	0,51	-0,53	-2,11	0,09	-0,19	-0,30
Оценка СКО	1,36		3,53	0,29	0,31	0,38
Значения экстремальных членов в выборке: минимального максимального	-3,84	-8,01	-11,90	-0,70	-1,15	-1,23
	3,90	4,40	4,90	0,93	0,67	0,63
Примечание:	признано аномальным отклонение по $\Delta V_n = +5,9$ м/с			признано аномальным отклонение по $\Delta R_n = -1,5$ км		

Результаты опытно-теоретической оценки точности выведения КА приведены в табл. 7.7, 7.8, 7.9.

Таблица 7.7. Опытнo-теоретические характеристики точности выведения РН «Циклон-3» (500 км < Н_{кр} < 1000 км)

Характеристика	Контролируемый параметр		
	i , угл.мин	$T_{окч}$, с	H_{max} , км
Оценка МО $\bar{\Delta}$	0,50	1,50	4,57
Границы доверительных интервалов для МО: минимальная Δ_{min} максимальная Δ_{max}	0,27	1,09	3,43
	0,74	1,90	5,71
Оценка СКО S	0,93	1,62	4,33
Нижняя граница СКО σ_1	0,88	1,54	4,09
Верхняя граница СКО σ_2	1,00	1,73	4,65
Опытнo-теоретическое значение СКО σ^*	0,88	1,73	4,65
Невязки опытных и расчетных СКО δ	0,19	-0,21	-0,17
Предельное отклонение $P = 0,993$	2,9	6,2	17,2
Коэффициент согласования $k_{согл}$	1,5	1,3	1,1

Таблица 7.8. Опытнo-теоретические характеристики точности выведения
РН «Циклон-3» (1000 км < Н_{кр} < 1700 км)

Характеристика	Контролируемый параметр		
	<i>i</i> , угл. мин	<i>T</i> _{оск} , с	<i>H</i> _{max} , км
Оценка МО $\bar{\Delta}$	0,96	2,13	4,58
Границы доверительных интервалов для МО:			
минимальная Δ_{\min}	0,55	1,37	2,98
максимальная Δ_{\max}	1,37	2,89	6,18
Оценка СКО <i>S</i>	1,23	2,29	4,77
Нижняя граница СКО σ_1	1,15	2,13	4,44
Верхняя граница СКО σ_2	1,35	2,51	5,25
Опытнo-теоретическое значение СКО σ^*	1,15	2,51	5,25
Невязки опытнoх и расчетнoх СКО δ	0,21	–0,21	–0,27
Предельное отклонение <i>P</i> = 0,993	4,1	8,9	18,8
Коэффициент согласования <i>k</i> _{согл}	1,6	1,0	1,0

Таблица 7.9. Опытнo-теоретические характеристики точности выведения
РН «Циклон-2»

Характеристика	Контролируемый параметр					
	<i>V</i> _н , м/с	<i>V</i> _р , м/с	<i>V</i> _в , м/с	<i>R</i> _н , км	<i>R</i> _р , км	<i>R</i> _в , км
Оценка МО $\bar{\Delta}$	0,51	–0,53	–2,11	0,09	–0,19	–0,30
Границы доверительных интервалов для МО:						
минимальная Δ_{\min}	0,19	–1,07	–2,94	0,03	–0,26	–0,39
максимальная Δ_{\max}	0,53	0,01	–1,28	0,16	–0,12	–0,21
Оценка СКО <i>S</i>	1,36	2,29	3,53	0,29	0,31	0,38
Нижняя граница СКО σ_1	1,30	2,17	3,36	0,27	0,29	0,36
Верхняя граница СКО σ_2	1,45	2,43	3,76	0,30	0,33	0,40
Опытнo-теоретическое значение СКО σ^*	1,30	2,43	3,36	0,27	0,33	0,36
Невязки опытнoх и расчетнoх СКО δ	1,03	–0,24	0,29	0,10	–0,15	0,58
Предельное отклонение <i>P</i> = 0,993	4,0	7,1	11,2	0,8	1,1	1,3
Коэффициент согласования <i>k</i> _{согл}	2,3	1,6	1,6	1,2	1,0	2,1

Из представленных данных следует:

РН «Циклон-3»

1. Границы доверительных интервалов для математических ожиданий в отклонениях параметров i , $T_{\text{оск}}$, H_{max} не включают в себя их расчетные значения (равные нулю), что свидетельствует о наличии значимых систематических смещений.

По всей совокупности пусков РН среднее взвешенное значение смещения в отклонениях параметров орбит составило:

- по наклонению – плюс 0,7 угл. мин.;
 - по периоду обращения – плюс 1,6 с;
 - по высоте – плюс 4,5 км.
2. Опытные оценки средних квадратичных отклонений контролируемых параметров $T_{\text{оск}}$, H_{max} не превысили, а параметра i – превысили их расчетные значения. В качестве опытно-теоретических оценок принимаются как ближайшие к расчетным значениям:
 - верхние границы доверительных интервалов σ_2 для параметров $T_{\text{оск}}$ и H_{max} ;
 - нижняя граница доверительного интервала σ_1 для параметра i .
 3. Невязка опытных и расчетных средних квадратичных отклонений составила:
 - по наклонению – плюс 0,20;
 - по периоду обращения – минус 0,21;
 - по высоте – минус 0,21.
 4. Опытный коэффициент согласования модели погрешностей СУ при расчете максимальных предельных отклонений составляет 1, 2–1,3.

РН «Циклон-2»

1. Границы доверительных интервалов для математических ожиданий в отклонениях параметров V_n , V_B , R_n , R_r , R_B не включают в себя их расчетные значения (равные нулю), что свидетельствует о наличии значимых систематических смещений. По параметру V_r систематическая составляющая в отклонениях отсутствует.
2. Опытные оценки средних квадратичных отклонений контролируемых параметров V_r , R_r не превысили, а параметров V_n , V_B , R_n , R_B превысили их расчетные значения. В качестве опытно-теоретических оценок принимаются как ближайшие к расчетным значениям:
 - верхние границы доверительных интервалов σ_2 для параметров V_r , R_r ;
 - нижние границы доверительных интервалов σ_1 для параметров V_n , V_B , R_n , R_B .

3. Невязка опытных и расчетных средних квадратичных отклонений составила плюс 0,4.

Соответствующая опытным отклонениям нормированная ковариационная матрица ошибок выведения следующая:

$$K_{\text{норм}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_n & V_r & V_B & R_r & R_r & R_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_n \\ V_r \\ V_B \\ V_n \\ R_r \\ R_B \end{matrix} & \begin{vmatrix} 1.00000 & -0.18322 & -0.10099 & 0.09944 & -0.23735 & -0.09568 \\ -0.18322 & 1.0000 & 0.12576 & -0.40151 & 0.39610 & 0.15235 \\ -0.10099 & 0.12576 & 1.00000 & -0.15052 & -0.05961 & 0.82013 \\ 0.09944 & -0.40151 & -0.15052 & 1.00000 & -0.19538 & -0.03815 \\ -0.23735 & 0.39610 & -0.05961 & -0.19538 & 1.00000 & 0.05878 \\ -0.09568 & 0.15235 & 0.82013 & -0.03815 & 0.05878 & 1.00000 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Опытный коэффициент согласования модели погрешностей СУ при расчете максимальных предельных отклонений составляет 1,6.

Из анализа приведенных данных следует, что при запусках с космодрома Плесецк ракета-носитель «Циклон-3» обеспечивает выведение космических аппаратов с предельными ошибками не более (с вероятностью $P = 0,993$):

Высота околокруговой орбиты 600 км

- по радиусу $\quad \quad \quad - \pm 15 \text{ км};$
- по периоду обращения $- \pm 5 \text{ с};$
- по наклонению $\quad \quad \quad - \pm 5 \text{ угл. мин.}$

Высота околокруговой орбиты 1500 км

- по радиусу $\quad \quad \quad - \pm 20 \text{ км};$
- по периоду обращения $- \pm 10 \text{ с};$
- по наклонению $\quad \quad \quad - \pm 5 \text{ угл. мин}$

При запусках с космодрома Байконур ракета-носитель «Циклон-2» обеспечивает выведение космических аппаратов на околокруговую орбиту 200 км с предельными ошибками не более (с вероятностью $P = 0,993$)

- по радиусу $\quad \quad \quad - \pm 10 \text{ км};$
- по периоду обращения $- \pm 5 \text{ с};$
- по наклонению $\quad \quad \quad - \pm 5 \text{ угл. мин.}$

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Абезгауз, Г. Г. и др. 1970. *Справочник по вероятностным расчетам*. М.: Воениздат.
- Авдеев, Ю. Ф. и др. 1990. *Полет космических аппаратов*. М.: Машиностроение.
- Аппазов, Р. Ф.; Лавров, С. С.; Мишин, В. П. 1966. *Баллистика управляемых ракет дальнего действия*. М.: Наука.
- Аппазов, Р. Ф.; Сытин, О. Г. 1987. *Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли*. М.: Наука.
- Аренс, В. Д.; Хитрик, М. С. и др. 1976. *Динамика систем управления с бортовыми цифровыми вычислительными машинами*. М.: Машиностроение.
- Батенко, А. П. 1977. *Управление конечным состоянием движущихся объектов*. М.: Сов. радио.
- Батенко, А. П. 1984. *Системы терминального управления*. М.: Радио и связь.
- Блажко, С. Н. 1954. *Курс сферической астрономии*. М.: Гостехиздат.
- Брикер, В. В.; Литвинов, В. С.; Негода, А. А.; Новиков, А. В. и др. 1996. Методология и результаты анализа точности выведения космических аппаратов ракетой-носителем «Зенит», *Космическая наука и технология*, т. 2. № 3–4.
- Герасюта, Н. Ф.; Новиков, А. В.; Белецкая, Н. Г. 1998. *Динамика полета. Основные задачи динамического проектирования ракет*. Днепропетровск.
- Гордеев, А. И. 1964. *Автономные системы управления баллистических ракет*. М.: Воениздат.
- Дмитриевский, А. А. и др. 1964. *Движение ракет*. М.: Машиностроение.
- Евтушенко, Ю. Г.; Крылов, И. А. и др. 1967. *Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли*. М.: Выч. центр АН СССР.
- Закатов, П. С. 1976. *Курс высшей геодезии*. М.: Недра.
- Игдалов, И. М.; Кучма, Л. Д.; Поляков, Н. В.; Шетун, Ю. Д. и др. 2004. *Ракета как объект управления*. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС.
- Игдалов, И. М.; Кучма, Л. Д.; Поляков, Н. В.; Шептун, Ю. Д. 2010. *Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и их космических ступеней*: монография. Под ред. акад. НАН Украины С. Н. Конюхова. Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского нац. ун-та. 264 с.
- Ишлинский, А. Ю. 1968. *Инерциальное управление баллистическими ракетами*. М.: Наука.
- Лебедев, А. А.; Герасюта, Н. Ф. 1970. *Баллистика ракет*. М.: Машиностроение.
- Летов, А. М. 1969. *Динамика полета и управления*. М.: Наука.
- Лидов, М. Л. 1961. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел, *Искусственные спутники Земли*: Сб. науч. тр. Вып. 8. М.: Изд-во АН СССР.
- Литвинов, В. С.; Новиков, А. В.; Тихонов, В. Л. 2009. *Точность выведения ракет-носителей*. Под ред. акад. НАН Украины С. Н. Конюхова. Днепропетровск: АРТ-ПРЕСС. 190 с.
- Локк, А. С. 1957. *Управление снарядами*. М.: Гостехиздат.
- Механика космического полета*. Под ред. В. П. Мишина. 1989. М.: Машиностроение.
- Основы теории полета космических аппаратов*. Под ред. Г. С. Нариманова. 1972. М.: Машиностроение.
- Петров, Б. Н. и др. 1983. *Бортовые терминальные системы управления*. М.: Машиностроение.
- Пугачев, В. С. 1960. *Теория случайных функций*. М.: Физматгиз.
- Разоренов, Г. Н.; Бахрамов, Э. А.; Титов, Ю. Ф. 2003. *Системы управления летательными аппаратами*. М.: Машиностроение.
- Сихарулидзе, Ю. Г. 1982. *Баллистика летательных аппаратов*. М.: Наука.
- Стражева, И. В.; Меркулов, В. С. 1973. *Векторно-матричные методы в механике полета*. М.: Машиностроение.
- Шор, Я. Б. 1962. *Статистические методы анализа и контроля качества и надежности*. М.: Сов. радио.
- Эльясберг, П. Е. 1965. *Введение в теорию полета ИСЗ*. М.: Наука.
- Юзефович, А. П.; Огородова, Л. В. 1980. *Гравиметрия*. М.: Недра.

Method of analysis for launch vehicle injection accuracy: monograph.
O. Novykov, V. Tikhonov, V. Litvinov. – Vilnius: Technika, 2015. – 256 p.

Методы анализа точности выведения ракет-носителей: монография.
А. В. Новиков, В. Л. Тихонов, В. С. Литвинов. – Вильнюс: Техника, 2015. – 256 с.

ISBN 978-609-457-873-1

The monograph is devoted to the theoretical and practical solution of problems related to the estimation of launch vehicle accuracy. In particular, it contains a review of prior and posterior methods for the estimation of spacecraft injection accuracy of launch vehicles with an inertial control system. The content of the book is mostly based on researches that were carried out during the development of rockets by Yuzhnoye in cooperation with partner companies.

The book is intended for specialists in the field of space-rocket technology and can be used as a tutorial for graduate and undergraduate students of technical universities.

Монография посвящена теории и практике решения задач по оценке точностных характеристик ракет-носителей. В частности, проведен обзор методов априорной и апостериорной оценок точности выведения космического аппарата ракетой-носителем с инерциальной системой управления. Основное содержание книги базируется на исследованиях, проведенных в ходе разработки ракет КБ «Южное» совместно со смежными организациями.

Книга предназначена для специалистов в области ракетно-космической техники и может служить в качестве учебного пособия для аспирантов и студентов технических университетов.

Redaktoriai *Marius Maksvytis, Nina Gilytė*
Maketuotojas *Gintautas Bancevičius*
Viršelio dizaineris *Panasenko Juriy Stanislavovich*

Apimtis 11,92 aut. l. Tiražas pagal poreikį.
Leidinio el. versija <http://doi.org/10.3846/2360-M>
Vilniaus Gedimino technikos universiteto leidykla „Technika“
Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius
<http://leidykla.vgtu.lt>
Spausdino UAB „Baltijos kopija“
Kareivių g. 13B, 09109 Vilnius
<http://www.kopija.lt>